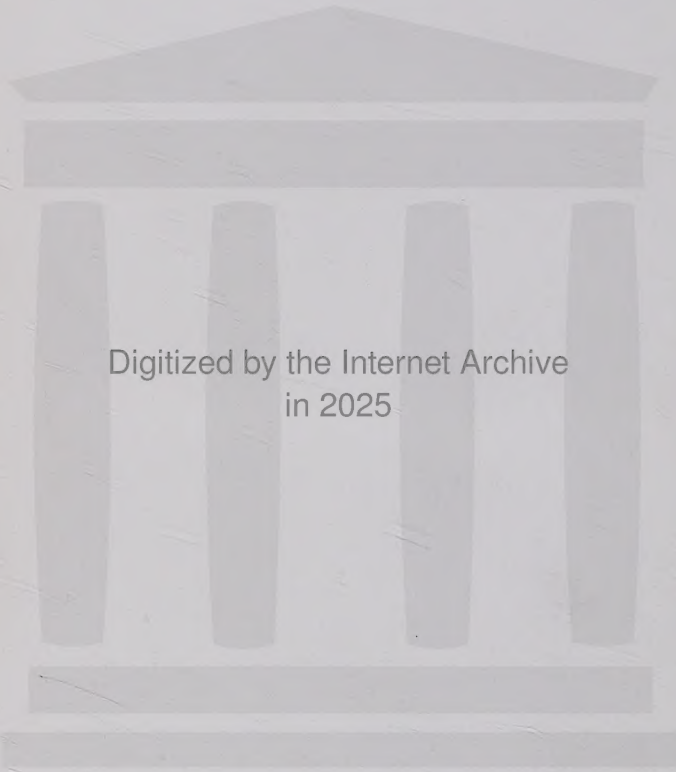


COUNTWAY LIBRARY



HC 4QBC 5



Digitized by the Internet Archive
in 2025

28. F 177

DIE
BRECHUNG DES LICHTS
IN GLÄSERN,

INSBESONDERE DIE

ACHROMATISCHE UND APLANATISCHE OBJECTIVLINSE.

VON

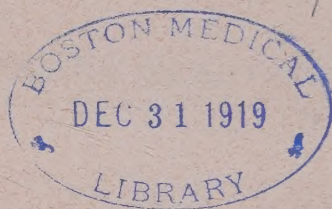
DR. WILIBALD SCHMIDT,

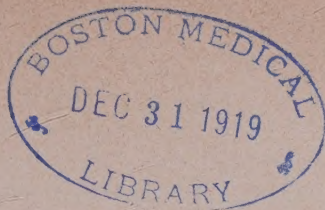
PROFESSOR AN DER LANDESSCHULE ZU GRIMMA.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1874.

28. F. 1797





1. Einleitendes.

Cauchy hat bekanntlich zuerst aus den Grundsätzen der Wellentheorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts als Function der Wellenlänge dargestellt, also hiermit die Dispersion aus mechanischen Principien abgeleitet. Er findet in seinem *Mémoire sur la dispersion de la lumière*, Prag 1836, dass in einem isotropen Mittel die Schwingungsdauer T der Aethermolecüle mit der Wellenlänge l verbunden ist durch die Gleichung (p. 56 Formel 35)

$$(1) \quad s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \dots$$

wo $s = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{l}$, die Coefficienten a_1, a_2, a_3, \dots aber sehr schnell abnehmende Grössen sind. Durch Umkehrung der Reihe, folgt aus (1) (p. 69 Formel 9)

$$(2) \quad k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \dots$$

Cauchy beschäftigt sich nun in den Paragraphen 6 bis 8 des angeführten Werks, p. 60 bis p. 184, mit der Frage, wie weit die bekannten Beobachtungen Fraunhofer's über die Brechung des Lichts in verschiedenen Medien, welche in der Abhandlung „Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten“, Denkschr. d. Münch. Acad. für 1814 und 1815 p. 193 ff., niedergelegt sind, den Grad der Annäherung bei Bestimmung der Schwingungsdauer durch die Wellenlänge, oder umgekehrt, zu treiben verstaten, d. h. wie viele Glieder in der rechten Seite der Gleichungen (1) oder (2) berücksichtigt werden müssen, um denjenigen Grad der Genauigkeit zu erreichen, welchen die Fraunhofer'schen Messungen über die Brechungsexponenten besitzen. Die hierbei angewendete Rechnungsmethode ist nicht ohne Bedenken.

Wenn die Zulässigkeit einer Hypothese über die Art der Abhängigkeit einer Grösse von einer andern an Versuchen

geprüft werden soll, so sind die unter Anwendung der wahrscheinlichsten Werthe der constanten Grössen mit Strenge aus der Hypothese für die verschiedenen speciellen Werthe der unabhängig-veränderlichen Grösse hervorgehenden Werthe der Function mit den beobachteten Werthen der letzteren zu vergleichen, und sodann ist zu entscheiden, ob die hierbei sich ergebenden Differenzen in die Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler fallen oder nicht. Statt dessen vergleicht Cauchy mit den beobachteten Werthen der Brechungsexponenten gewisse, aus den Beobachtungen abgeleitete, angeblich wahrscheinlichste Werthe, die nicht mit Strenge der jedesmaligen Hypothese entsprechen, und beurtheilt danach, ob die sich ergebenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen können, die Zulässigkeit der Hypothese, ohne zu beachten, dass schon die berechneten Werthe der Hypothese nicht streng genügen. Diess wird am evidentesten, wenn wir gleich den ersten Theil der umfänglichen Rechnung verfolgen, in welchem die Frage zur Beantwortung vorliegt, ob man in obigen Gleichungen (1) und (2) die rechte Seite auf ihr erstes Glied allein reduciren dürfe. Wir wollen uns dabei, der grösseren Deutlichkeit halber, beispielsweise auf das in Fraunhofer's Tafel III. p. 225 an erster, bei Cauchy (p. 62 d. a. Abh.) an letzter Stelle angeführte brechende Medium beziehen, Flintglas Nr. 13 nach Fraunhofer's Bezeichnung, 4. Art von Flintglas nach Cauchy's Bezeichnung.

Es versteht sich von selbst, dass unter der Annahme $k^2 = b_1 s^2$ die Dispersion zu existiren aufhören müsste; denn wenn für ein Medium $k^2 = b_1 s^2$, und für ein zweites $k'^2 = b_1' s^2$, so würde der Brechungsexponent $\frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{b_1'}{b_1}}$ von der Schwingungsdauer unabhängig. Auch erklärt diess Cauchy wiederholt selbst in dem betreffenden Abschnitt der Rechnung, z. B. p. 75 unten, p. 101 in der Mitte. Der correcte Weg, numerisch die Zulässigkeit der Hypothese, es sei $k^2 = b_1 s^2$, an den Beobachtungen zu prüfen, wäre nun der, aus den verschiedenen beobachteten Brechungsexponenten eines Glases, unter Voraussetzung, sie seien nach der Hypothese ein-

ander gleich, den wahrscheinlichsten Werth abzuleiten, und diess würde das arithmetische Mittel sein, denselben mit den einzelnen beobachteten Werthen zu vergleichen und zu entscheiden, ob die Differenzen in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen. Auch ändert es nichts Wesentliches an der Sache, dass Cauchy seinen Calcul nicht auf die Brechungsexponenten selbst, sondern auf ihre Quadrate bezieht, und folglich die Quadrate der von Fraunhofer angegebenen Grössen als unmittelbare Data der Beobachtung ansieht. Diese würden für die oben genannte Glassorte sein 2,649568 2,655861 2,673344 2,696244 2,716761 2,756547 2,792449, das arithmetische Mittel davon 2,705825. Die Differenzen zwischen diesem letzteren und jenen sieben Werthen würden das Kriterium abgeben für die Zulässigkeit der Hypothese. Statt dessen erklärt Cauchy p. 98 f., unter Annahme jener Hypothese $k^2 = b_1 s^2$ seien die wahrscheinlichsten Werthe der Brechungsexponenten für die Linien $B, C, \dots H$ in der betreffenden Glassorte 2,664794 2,669538 2,682389 2,699079 2,714036 2,742726 2,768215, und die Differenzen zwischen diesen Zahlen und den Beobachtungsdaten, worunter die grösste 0,024234 ist, gelten ihm als entscheidend gegen die Zulässigkeit der Hypothese; er beachtet also nicht, dass diese abgeleiteten, angeblich wahrscheinlichsten Werthe selbst schon einen weit stärkeren Widerspruch gegen die aufgestellte Hypothese in sich enthalten, denn sie selbst differiren unter sich um 0,103421. Wie findet Cauchy aber jene angeblich wahrscheinlichsten Werthe?

Bekanntlich sind bei Fraunhofer 12 Beobachtungsreihen über die Brechung derselben sieben Strahlen $B, C, \dots H$ in zehn verschiedenen Substanzen mitgetheilt. Die Quadrate der Brechungsexponenten nennt Cauchy $\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_7$ allgemein Θ_i , das arithmetische Mittel aus den sieben, einer Beobachtungsreihe über eine Substanz zugehörenden Werthe Θ ; dann gelten ihm, unter der Hypothese, es sei $k^2 = b_1 s^2$, als die wahrscheinlichsten Werthe der Brechungsexponenten (p. 96 Formel 125 oder identisch damit Formel 124) die Werthe $\vartheta_i = \Theta + \frac{\Theta}{\Sigma \Theta} (\Sigma \Theta_i - \Sigma \Theta)$, wo das Summationszeichen Σ die Summirung der homologen Grössen

aus den 12 verschiedenen Beobachtungsreihen andeutet. Man sieht sofort, dass diese Formel zu dem fraglichen Zwecke nicht völlig geeignet ist. Denn auf ihre numerische Anwendbarkeit muss offenbar die Anzahl der Beobachtungsreihen ohne Einfluss sein; dieser Ausdruck müsste auch seine Geltung behalten, wenn die Beobachtungsreihe über Flintglas 13 allein zur Entscheidung über die Zulässigkeit der Hypothese existirte. Dann würde aber $\Sigma \Theta = \Theta$, $\Sigma \Theta_i = \Theta_i$, folglich $\vartheta_i = \Theta_i$ und die Differenzen zwischen diesen angeblich wahrscheinlichsten und den beobachteten Werthen wären durchgängig Null. Oder auch, wenn die 3 Fraunhofer'schen Beobachtungsreihen über Flintglas 23 und 13 allein zu Grunde lägen, so würden die nach Cauchy zu berechnenden wahrscheinlichsten Werthe so wenig von den wirklich beobachteten Θ_i sich unterscheiden, dass man damit unbedingt die Hypothese, es sei $k^2 = b_1 s^2$, als richtig anerkennen müsste. Der Fehler in der Schlussfolge lässt sich also kurz so bezeichnen: Man wird zwar einräumen, dass unter der Hypothese (42) p. 78 die Formel $\Theta_1 = \frac{\Sigma \Theta_i}{\Sigma S \Theta_i} S \Theta_i$ (65) und die folgenden (66) p. 80, welche in ihrer Gesamtheit in der That identisch sind mit (124) p. 96, genähertere Werthe bieten, als die unmittelbar beobachteten Θ_i , aber doch sind sie nicht der Hypothese streng entsprechende, und darum sind nicht die Differenzen zwischen diesen genäherten und den beobachteten Werthen als eventuelle Beobachtungsfehler anzusprechen, sondern um diese zu erhalten, müssten noch die Differenzen zwischen ihnen und denjenigen wahrscheinlichsten Werthen hinzukommen, welche der Hypothese streng entsprechen.

Von den p. 98 f. gefundenen Werthen ϑ_i ausgehend, und immer das gleiche Princip anwendend, schreitet der Calcül weiter fort und gelangt bekanntlich zu dem Resultate, man müsse in Gleichung (1) und (2) vier Glieder der rechten Seite beachten, um eine der Fraunhofer'schen Präcision gleichkommende Genauigkeit zu erhalten.

Wie es nun auch mit diesem ausgedehnten Rechenwerke der Anwendung der allgemeinen Formeln auf Fraunhofer's Messungen stehen mag, die allgemeinen Gleichungen des

grossen Analytikers über die Fortpflanzung des Lichts in verschiedenen Medien, die auch in den späteren Abhandlungen Exercices d'analyse et de physique mathématique I, 1840 p. 133 und 212 entwickelt sind, haben im Ganzen die Anerkennung der Mathematiker gefunden, und nicht selten begnügt man sich insbesondere hinsichtlich des Brechungsexponenten mit der zweigliedrigen Function $n = a + bl^{-2}$, welche aus einem absoluten und einem der Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportionalen Gliede besteht, so z. B. Beer Einleitung in die höhere Optik 1853 p. 211, Briot in der Vorrede zu Essais sur la théorie mathématique de la lumière p. XV der Klinkerfues'schen Uebersetzung. Angeregt durch Cauchy's frühere, in den Exercices de mathématiques enthaltenen Untersuchungen über die Undulationstheorie des Lichts hatte Baden-Powell vor dem Erscheinen des oben citirten Werks Cauchy's von 1836 eine Formel für die Brechung und Dispersion aufgestellt, ohne jedoch die Art ihrer Ableitung mitzutheilen, Phil. Transact. 1835 I p. 249 cf. Pogg. Ann. XXXVII p. 352, wonach der Brechungsexponent μ ist gleich $C \cdot \left(\frac{\pi r n}{\lambda}\right) : \sin\left(\frac{\pi r n}{\lambda}\right)$, wo $\pi r n$ ein gewisser Bogen und C ein gewisser Factor ist, welche beide von der Natur des brechenden Mediums abhängen und λ die Wellenlänge des Lichtstrahls ist. Und kurz darauf lieferte Tovey zur Unterstützung der Powell'schen Formel, Phil. Magaz. Ser. III Vol. VIII p. 7, cf. Pogg. Ann. XXXVII p. 360, die Ableitung einer Formel aus mechanischen Principien, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts annähernd darstellt als zweigliedrige Function, in welcher das erste Glied absolut, das zweite dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional ist, sowie auch nach Powell's Formel annähernd $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{C} \left(1 - \frac{\pi^2 r^2 n^2}{2 \cdot 3 \cdot \lambda^2}\right)$ ist.

Dass jedoch eine Formel $n = a + bl^{-2}$ den Brechungsexponenten bei weitem nicht mit genügender Schärfe ausdrückt, davon werden wir uns weiter unten überzeugen, und dass die Powell'sche Formel trotz der zufriedenen Erklärung des Verfassers am Schluss der Abhandlung dies gleichfalls nicht leistet, geht aus dessen eignen Berechnungen her-

vor, indem die Differenzen zwischen den berechneten und den von Fraunhofer beobachteten Werthen bei Flintglas 13 zweimal bis auf 0,0006, bei Flintglas 23 auf 0,0007, bei Flintglas 30 auf 0,0009, bei Flintglas 3 sogar auf 0,0010 *) steigen, während doch die Beobachtungen Fraunhofer's in den ersten vier Decimalbruchstellen absolute Genauigkeit beanspruchen.

Die Acten über die theoretische Ableitung der Brechung und Dispersion des Lichts sind indessen noch nicht geschlossen. Theils sind aus Cauchy's Fundamentalgleichungen neue Formeln für die Brechung abgeleitet worden, so von Christoffel, Monatsberichte der Academ. d. Wiss. zu Berlin aus 1861 p. 906 ff. die Formel

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}},$$

wo λ_0 die Wellenlänge desjenigen Strahls im dispersionsfreien Raume ist, welcher überhaupt noch aus dem ersten Medium in das zweite übergehen kann, während alle Strahlen von kleinerer Wellenlänge totale Reflexion erleiden, ferner n_0 der Brechungsindex dieses Strahls, λ aber die veränderliche Wellenlänge und n der zugehörige Brechungsindex ist. Theils ist auf Umstände hingewiesen worden, welche auf den Gang des Lichtstrahls Einfluss üben, ohne dass Cauchy ihnen Rechnung getragen; so von Briot in dem oben citirten Werke, der eine periodische Ungleichheit in der Vertheilung der Aethermolecüle zwischen den ponderabeln Molecülen des durchsichtigen, das Licht brechenden Körpers in Rechnung zieht. Theils ist dargethan worden, dass die Grundlage, auf welcher Cauchy in seinen späteren Abhandlungen die Theorie der Brechung aufbaut, nicht in allen Punkten haltbar ist; so namentlich von Von der Mühl, Mathemat. Annalen von Clebsch und Neumann V, welcher auch die übrige hierher gehörende Literatur anzieht, und welcher den

*) Dass diese Differenz für die Linie B in Pogg. Ann. p. 357 sogar 0,0020 beträgt, beruht auf einem auch in Beer's Einleitung etc. p. 213 übergegangenem Druckfehler; es muss in der letzten Columnne 1,6010 statt 1,6000 heissen.

interessanten, jedoch noch nicht zum Abschluss gebrachten Versuch gemacht, die Reflexion und Brechung des Lichts aus mechanischen Principien abzuleiten unter der Fundamentalannahme, dass der Aether incompressibel sei.

Unter diesen Umständen erscheint es nicht unstatthaft, nochmals den Weg der reinen Empirie zu betreten, und auf ihm eine möglichst einfache Formel für die Brechung und Dispersion zu gewinnen, theils um sie zur möglichst genauen und bequemen Lösung gewisser praktischer Aufgaben der Optik zu verwenden, theils in der allerdings unbestimmten Aussicht, auf diesem Wege einen Fingerzeig für eine nachher theoretisch abzuleitende Formel zu gewinnen. Fragt man nach dem Kennzeichen der Einfachheit einer Formel, so ist allerdings das am höchsten stehende Kriterium dafür die mathematische Deducirbarkeit aus den einfachsten Gesetzen der Mechanik; doch soll auf diese Art der Einfachheit eben zur Zeit verzichtet werden. Demnächst kann die Einfachheit darin gesucht werden, dass die Function einen wenig complicirten, regelmässigen Bau habe. Und in dieser Beziehung lässt die aus Cauchy's oben angeführter Gleichung (2) hervorgehende Formel für den Brechungsexponenten

$$(3) \quad n^2 = c_1 + c_2 s^2 + c_3 s^4 + \dots$$

welche auch

$$(4) \quad n^2 = d_1 + d_2 l^{-2} + d_3 l^{-4} + \dots$$

oder

$$(5) \quad n = e_1 + e_2 l^{-2} + e_3 l^{-4} + \dots$$

geschrieben werden kann, nichts zu wünschen übrig. Auch lässt sich mit Entschiedenheit voraussetzen, dass sie bei einer hinreichend grossen Anzahl von Gliedern mit hinreichender Genauigkeit die Data der Beobachtung darstellen wird. Drittens kann aber die Einfachheit der Function auch darin erblickt werden, dass sie bei gleich wenig complicirtem Bau aus möglichst wenig Gliedern besteht und gerade dies bedingt ihre Brauchbarkeit zur Lösung praktisch-optischer Probleme. Wenn also die Form der Function wäre

$$(6) \quad n = a l^\alpha + b l^\beta + c l^\gamma + \dots$$

und es wären zwar $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nicht nach gleichen Inter-

vallen fortschreitende Exponenten, wie in (5), aber man hätte dafür eine geringere Anzahl von Gliedern nöthig als in (5), so würde man von diesem Gesichtspunkte aus die Function (6) einfacher nennen können. Käme nun noch hinzu, dass für alle unter sich gleichartigen Stoffe, z. B. alle Glasarten, die Function hinsichtlich der darin vorkommenden Exponenten der Wellenlänge sich als gleich erwiese, so erhielte sie dadurch einigermassen das Gepräge des Naturgesetzes und es würde die Hoffnung erweckt, dass sie einer theoretischen Ableitung fähig wäre.

Es soll demnach im Folgenden unter der Beschränkung auf ganze Exponenten α , β , ... diejenige Function der Form (6) gesucht werden, welche die Beobachtungen über Brechung und Dispersion des Lichts in Glasarten mit aller erforderlichen Treue wiedergiebt.

Allerdings ist uns nicht unbekannt, dass man vor Hypothesen warnt, welche vielleicht innerhalb eines begrenzten Erscheinungsgebietes alle Beobachtungen in befriedigendster Weise beherrschen, betreffs deren Grundlagen jedoch nicht sofort darüber Rechenschaft abgelegt wird, ob dieselben mit anerkannten Naturprincipien im Widerspruch stehen oder nicht (vergl. Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik I § 385). So könnte es auch in unserm Falle geschehen, dass die reine Empirie uns zu einer derartigen Function der Wellenlänge führte, dass die Exponenten der letzteren nicht im Einklang stünden mit den Principien der Mechanik. Was insbesondere das Gesetz der Dispersion anlangt, so weist schon Bigeon, Ann. de Chim. et de Phys. I s., XXXVII p. 440, den Gedanken zurück, beliebige Ausdrücke, welche die Resultate der Beobachtung annähernd in eine Formel zusammenfassen, als Darstellung des Naturgesetzes annehmen zu wollen. Derartige Schlüsse könnten bisweilen nicht ohne Nachtheil für die Wissenschaft sein, indem sie zu Untersuchungen verleiten, deren Resultat man zum voraus als gegeben erachte. Indem Bigeon Rudberg's Versuch einer empirischen Formel über das Gesetz der Dispersion kritisirt, erklärt er mit vollem Rechte, dass die überdiess wenig vollkommene Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung nur darauf hinauskomme, dass eine

Interpolation, in welcher man die constanten Grössen aus den äussersten Gliedern einer nur wenig ausgedehnten Reihe von nur wenig unter einander abweichenden Gliedern bestimmt, in ihren mittleren Gliedern nur wenig von den Daten der Beobachtung differiren wird, sobald die ganze Erscheinung dem Gesetze der Stetigkeit unterliegt. Freilich belaufen sich auch die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung bei Rudberg auf 3 bis 4 Tausendtheile der Wellenlänge, d. h. wenn man diess auf die Brechungsexponenten reducirt, bei Flintglas No. 23 in der Linie F' auf 6 Einheiten der dritten Decimalbruchstelle, während doch die Präcision der Fraunhofer'schen Beobachtungen kaum 5 Einheiten der fünften Decimalbruchstelle zulässt.

Dieser Einwürfe sind wir uns wohl bewusst, indem wir uns dennoch dazu begeben, eine empirische Formel zu suchen. Die Gefahr der vergeblichen Mühe und die Gefahr für die Wissenschaft, wenn wir ja so unbescheiden sein wollten, von einer solchen von Seiten unsrer Arbeit zu sprechen, schwindet um so mehr, je gewissenhafter man eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung anstrebt, mit je grösserer Unpartheilichkeit man alles gegebene Material der Erfahrung der Probe unterwirft, je mehr man sich endlich vergegenwärtigt, dass die zu findende Formel vorläufig nur ein Instrument sein soll, dessen man sich bedient, um den Gang jeder möglichen unsern Augen wahrnehmbaren Lichtart mathematisch zu verfolgen, und nur im glücklichsten Falle die Repräsentation eines Naturgesetzes sein könnte.

Unsre Untersuchung wird sich auf die nämlichen Bestimmungen Fraunhofer's an sieben verschiedenen Glasarten beziehen, welche auch Cauchy neben den übrigen von Fraunhofer untersuchten Medien dem numerischen Theile der Abhandlung von 1836 zu Grunde legt, weil diese Messungen hinsichtlich ihrer Genauigkeit wohl noch unübertroffen dastehen. Die Brechungsindices sollen als Functionen der Wellenlänge dargestellt werden, wie dieselbe in der Luft ist. Natürlich würde man statt dessen auch die Schwingungsdauer als Argument einführen können, und diess würde sich insofern für den etwaigen theoretischen Zusammenhang em-

pfehlen, als die Schwingungsdauer in beiden Medien dieselbe ist; es würde diess nur eine Aenderung der constanten Coefficienten bewirken, da die Schwingungsdauer t mit der Wellenlänge in der Luft l und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft w durch die Gleichung $t = \frac{l}{w}$ verknüpft ist; allein da w nicht mit derselben Genauigkeit bekannt zu sein scheint, als l , so ziehen wir vor, l als unabhängige Veränderliche beizubehalten.

Die Werthe von l , welche den Strahlen der Fraunhofer'schen Linien $B, C, \dots H$ zukommen, sind in vortrefflicher Weise von Angström gemessen und Pogg. Ann. CXXIII p. 489 ff. mitgetheilt. Aus den Einzelmessungen, wovon zuletzt die Mittel gezogen werden, sieht man, dass die Präcision hinter der der Fraunhofer'schen Angaben über die Brechungsindices kaum zurücksteht. Dass diese Wellenlängen von Angström zur Verfügung stehen, ist ein grosser Vortheil, den die nachstehenden Rechnungen geniessen; für Cauchy, der nur die Angaben Fraunhofer's über die Wellenlänge kannte, war wohl die geringere Zuverlässigkeit der Zahlen ein Bestimmungsgrund, in künstlicher Weise von diesen Werthen sich unabhängig zu machen. Er giebt zwar p. 63 bis 69 die Fraunhofer'schen Wellenlängen und die daraus folgenden Werthe der Wellenlängen in den verschiedenen Medien an, benutzt aber dieselben in der darauf folgenden Untersuchung nicht im mindesten.

2. Bestimmung der Brechungsexponenten in Flintglas 23 als rationaler ganzer Function der Wellenlänge, welche den einzelnen Strahlen in der Luft zukommt.

Das den nachfolgenden Rechnungen zu Grunde liegende Material ist Folgendes: Fraunhofer hat in seiner Abhandlung „Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten“ Denkschriften der Münchener Academie 1814—14 p. 193—226, welche auch Schumacher, astronomische Abhandlungen 1823, Heft 2 p. 13 ff. in französischer Uebersetzung mitgetheilt ist, neben den Brechungsexponenten einiger andrer Stoffe für die sieben

Spectrallinien *B, C, D, E, F, G, H* diejenigen von folgenden 7 Glasarten mitgetheilt

Tafel I.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
Flintglas No. 13	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024
Crown Glas No. 9	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005
Flintglas No. 3	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532
Flintglas No. 30	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356
Crown Glas No. 13	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372
Crown Glas Lit. M	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150
Flintglas No. 23				
Prisma von				
60° 15' 42"	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495
Flintglas No. 23				
Prisma von				
45° 23' 14"	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
Flintglas No. 13	1,648260	1,660285	1,671062	
Crown Glas No. 9	1,536052	1,541657	1,546566	
Flintglas No. 3	1,620042	1,630772	1,640373	
Flintglas No. 30	1,643466	1,655406	1,666072	
Crown Glas No. 13	1,534337	1,539908	1,544684	
Crown Glas Lit. M	1,566741	1,573535	1,579470	
Flintglas No. 23				
Prisma von				
60° 15' 42"	1,646756	1,658848	1,669686	
Flintglas No. 23				
Prisma von				
45° 23' 14"	1,646780	1,658849	1,669680	

und Angström „Neue Bestimmungen der Längen der Lichtwellen“ Pogg. Ann. CXXIII p. 489 giebt die Wellenlängen der sieben Strahlen *B, C, ... H* in Hundertmilliontheilen des Par. Zoll

Tafel II.

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
2539,91	2426,50	2178,69	1948,25	1797,38	1592,32	1467,19
54	28	53	21	37	53	7,58
76	23	62	24	21	22	7,32
	33	64	20	27	16	6,66
	25	57	25	05	50	7,12
	27	61	24	20	32	7,34
		56	23	11		6,98
		48	32	55		
Mittel 2539,73	2426,29	2178,59	1948,24	1797,27	1592,34	1467,18*)

Fraunhofer's Zahlen sind aus Winkelmessungen abgeleitet, welche mittelst eines repetirenden Theodoliths bei sechsmaliger Repetition bis auf die Zehntheile der Secunde angegeben sind. Eine Vergleichung der beiden Reihen für Flintglas No. 23, welche durch zwei verschiedene Prismen gewonnen worden sind, lehrt, dass die beobachteten Brechungsindices unter sich bei den einzelnen Linien um folgende Beträge differiren

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
0,000032	0,000018	0,000001	0,000049	0,000024	0,000001	0,000006

Man wird mit grösster Wahrscheinlichkeit annehmen können, dass wenigstens da, wo die Differenz der beiden Beobachtungen am grössten ist, d. i. bei der Linie *E*, der wahre Werth zwischen den beiden Beobachtungsdaten liegen werde, dass also die Beobachtungsfehler im allgemeinen noch nicht die Grösse 0,000049 erreichen.

Von den oben angegebenen mittleren Wellenlängen differiren die einzelnen Messungen höchstens um

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
0,19	0,21	0,11	0,08	0,28	0,19	0,52

*) So finden sich die Zahlen nicht allein in der Abhandlung in Pogg. Ann., sondern auch in der Originalabhandlung Öfversigt af Vet.-Akad. Förh. 1863, p. 44. Freilich ist nicht ganz ersichtlich, wie die Mittelwerthe gewonnen sind, da dieselben für die Linien *D*, *E*, *F*, *G* zwar die genauen arithmetischen Mittel sind, für *B* dagegen 2539,74 näher liegen, für *H* dasselbe genau 1467,17 und für *C* genau 2426,31 sein würde.

der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung der Wellenlänge ist abgesehen von der schwer erkennbaren Linie H am grössten bei F , nämlich 0,10, bei H ist er 0,18.

Indem wir nun eine Formel suchen, welche die Brechungsexponenten als Function der Wellenlänge ausdrückt, nehmen wir vor der Hand an, die in der Tafel II als Mittelwerthe angegebenen Wellenlängen seien vollkommen genau, und suchen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewisse constante Grössen, welche mit gewissen Potenzen der Wellenlängen verbunden, zu Zahlen führen, welche nicht weiter von den in Tafel I gegebenen Brechungsexponenten abweichen, als die zu erwartenden Beobachtungsfehler zulassen. Erst bei Veranschlagung dieser Grenzen der Beobachtungsfehler kann in Betracht gezogen werden, dass die Fehler nicht allein in einer fehlerhaften Bestimmung der Brechung bestehen, sondern dass auch die Fehler in der Bestimmung der Wellenlänge influiren. Dieser letzte Einfluss ist indessen von geringer Bedeutung. Berechnen lässt er sich freilich immer erst, nachdem im einzelnen Falle die Form der Function und die zugehörigen constanten Grössen gegeben sind. Man wird sich überzeugen, dass selbst, wenn man den Fehler in der Bestimmung der Wellenlänge $= 0,18$ voraussetzt, in den nach den später aufgestellten Formeln zu berechnenden Indices nur Aenderungen von circa 0,00001 resultiren können, so dass auch in dem ungünstigsten Falle, dass die grösste fehlerhafte Bestimmung des Brechungsindex mit dem Fehler in der Wellenlänge in gleichem Sinne wirkend sich vereinigte, doch die oben angegebene Grenze von 0,000049 nur wenig hinausgerückt würde. Daher glauben wir die Grösse 0,000049 als überhaupt statthafte Grenze des Beobachtungsfehlers festhalten zu müssen.

Wir werden für irgend eine der obigen sieben Glassorten zuerst eine genügende Formel suchen und sodann untersuchen, ob dieselbe auch für die übrigen Glasarten sich eignet oder nicht. Welche Glasart zu jener ersten gewählt wird, ist willkürlich; es ist aber wohl am natürlichsten, sich für diejenige zu entscheiden, an welcher die Grösse der Fraunhoferschen Beobachtungsfehler unmittelbar ersichtlich ist, also Flintglas No. 23, und da die eine von beiden Reihen so be-

rechtigt ist als die andere, so werden wir aus beiden die arithmetischen Mittelwerthe ziehen. Dieselben finden sich in der nachfolgenden Tafel III. unter der Ueberschrift *N*.

Ein Blick auf die Reihe dieser Zahlen lehrt, dass die äussersten Brechungsexponenten noch nicht um den 40. Theil differiren, während die Wellenlängen sich nahe wie 2:1 verhalten, dass also in der Function (6) das erste Glied von l absolut sein wird. Der dennoch bestehende Unterschied der Brechbarkeit verschiedenfarbiger Strahlen macht jedoch das Hinzutreten eines von der Wellenlänge abhängigen Gliedes nöthig, und zwar mit negativem Exponenten der Wellenlänge, weil mit abnehmender Wellenlänge die Brechbarkeit zunimmt. Wir untersuchen daher zunächst die Leistungen der Formeln

$$(7) \quad n = a + bl^{-}$$

$$(8) \quad n = a + bl^{-2}$$

$$(9) \quad n = a + bl^{-3}$$

die hierin vorkommenden Constanten a und b bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate bezüglich durch

$$(10) \quad a = \frac{\sum l^{-2} \sum N - \sum l^{-1} \sum l^{-1} N}{7 \sum l^{-2} - (\sum l^{-1})^2}, \quad b = \frac{7 \sum l^{-1} N - \sum l^{-1} \sum N}{7 \sum l^{-2} - (\sum l^{-1})^2}$$

oder

$$(11) \quad a = \frac{\sum l^{-4} \sum N - \sum l^{-2} \sum l^{-2} N}{7 \sum l^{-4} - (\sum l^{-2})^2}, \quad b = \frac{7 \sum l^{-2} N - \sum l^{-2} \sum N}{7 \sum l^{-4} - (\sum l^{-2})^2}$$

oder

$$(12) \quad a = \frac{\sum l^{-6} \sum N - \sum l^{-3} \sum l^{-3} N}{7 \sum l^{-6} - (\sum l^{-3})^2}, \quad b = \frac{7 \sum l^{-3} N - \sum l^{-3} \sum N}{7 \sum l^{-6} - (\sum l^{-3})^2}$$

Was die hierin vorkommenden Grössen l^{-1} anlangt, so werden wir diese zunächst nach dem Verhältniss 1 Par. Zoll = 0,02706995 Meter auf Metermass reduciren, und zwar zur Vermeidung allzuvieler Bruchstellen den millionten Theil des Meters zur Längeneinheit nehmen. Nehmen wir an, die Grössen l seien auf sechs Stellen genau, so würde es allerdings ausreichen, die von l^{-1} auf gleich viele Stellen zu berechnen. Jedenfalls würden aber, indem diese Stellen als absolut genau zu betrachten wären, die daraus abgeleiteten Potenzen und Producte auf mehr als sechs Stellen zu berechnen sein, da nach der Natur der Formeln (10), (11), (12) nicht selten mehrere der ersten geltenden Stellen durch Subtraction verschwinden.

Indem wir uns hierbei zehnstelliger Logarithmen bedienen, so ziehen wir es vor, auch sogleich die Werthe von l^{-1} so genau hinzustellen, als die zehnstelligen Logarithmen es verstaten; ja wir haben unter Umständen elf Stellen der Numeri logarithmisch berechnet, um doch in den Summen die Sicherheit der ersten zehn Stellen zu wahren. Die nachfolgende Tafel III. enthält eine Zusammenstellung der nach diesen Grundsätzen berechneten Grössen.

Tafel III.

Einige Potenzen von l^{-1} und Producte solcher Potenzen mit den zugehörigen N , durch zehnstellige Logarithmen berechnet.

	l^{-1}	l^{-2}	l^{-3}	l^{-4}
<i>B</i>	1,4545377519	2,115680069	3,077336531	4,476102155
<i>C</i>	1,5225439518	2,318140083	3,529470161	5,373773444
<i>D</i>	1,6956532272	2,875239865	4,875409753	8,267004279
<i>E</i>	1,8961386509	3,595341781	6,817266511	12,926482529
<i>F</i>	2,0554135795	4,224724982	8,683557096	17,848301177
<i>G</i>	2,3199399407	5,382121327	12,486198234	28,967229977
<i>H</i>	2,5178459116	6,339548031	15,962005087	40,189869243
Σ	13,4620730136	26,850796138	55,431243373	118,048762804
	l^{-6}	N	$l^{-1} N$	$l^{-2} N$
<i>B</i>	9,47000012	1,6265800	2,3659220146	3,441322886
<i>C</i>	12,45715962	1,6284600	2,4794019211	3,774998397
<i>D</i>	23,76962027	1,6336665	2,7701318710	4,697183044
<i>E</i>	46,47512268	1,6405195	3,1106524293	5,898228298
<i>F</i>	75,40416384	1,6467680	3,3847893080	6,957141905
<i>G</i>	155,90514628	1,6588485	3,8484288882	8,928123884
<i>H</i>	254,78560647	1,6696830	4,2040045130	10,585035574
Σ	578,26681928	11,5045255	22,1633309452	44,282033988
	$l^{-3} N$			
<i>B</i>	5,005534051			
<i>C</i>	5,747600975			
<i>D</i>	7,964793585			
<i>E</i>	11,183858648			
<i>F</i>	14,299803950			
<i>G</i>	20,712711195			
<i>H</i>	26,651488540			
Σ	91,565790944			

Mit Hülfe dieser Werthe berechne man nach Gleichung (10) oder (11) oder (12) die Coefficienten a und b , setze dieselben in Gleichung (7) oder (8) oder (9) ein, berechne die den einzelnen Linien $B, C, \dots H$ hiernach zukommenden Brechungsexponenten n , stelle sie mit den durch die Beobachtung gegebenen Werthen N zusammen und suche die Differenz $\Delta = n - N$. Die Resultate dieser Rechnung sind in der nachfolgenden Tafel IV. enthalten.

Tafel IV.

$$1) \ n = 1,56674101 + 0,03991498 \ t^{-1}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6247989	1,6275133	1,6344230	1,6424253
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = -$	0,0017811	0,0009467	0,0007565	0,0019058
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6487828	1,6593414	1,6672408	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0020148	0,0004929	0,0024422	
$\Sigma \Delta =$	0,0000000			

$$2) \ n = 1,60460630 + 0,010140530 \ t^{-2}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6260604	1,6281135	1,6337628	1,6410650
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = -$	0,0005196	0,0003465	0,0000963	0,0005455
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6474472	1,6591839	1,6688927	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0006792	0,0003354	0,0007903	
$\Sigma \Delta =$	0,0000000			

$$3) \ n = 1,61711132 + 0,003332890 \ t^{-3}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6273677	1,6288747	1,6333605	1,6398325
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0007877	0,0004147	0,0003060	0,0006870
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6460527	1,6587265	1,6703109	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = -$	0,0007153	0,0001220	0,0006279	
$\Sigma \Delta =$	0,0000000			

Zunächst dient es zur Controle für die Richtigkeit der numerischen Rechnung, dass in allen drei Fällen $\Sigma \Delta = 0$; denn setzt man die durch (10) bestimmten Werthe von a und b in (7) ein, so erhält man in der That

$$\Sigma \Delta = 7 \cdot \frac{\Sigma l^{-2} \Sigma N - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-1} N}{7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2} + \frac{7 \Sigma l^{-1} N - \Sigma l^{-1} \Sigma N}{7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2} \cdot \Sigma l^{-1} - \Sigma N = 0$$

und analog, wenn man die Werthe von a und b aus (11) in (8), oder aus (12) in (9) substituiert.

Der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers ist nach der ersten der obigen drei Formeln 0,0012988, nach der zweiten 0,0004152, nach der dritten 0,0004554, in allen Fällen also bedeutend grösser, als die von uns als zulässig erkannte Grenze der Beobachtungsfehler, welche nur 0,000049 war; überdiess aber erkennt man aus dem Gange der Differenzen Δ , insbesondere daraus, dass diese Differenzen unter Anwendung der dritten Formel nach der Reihe gerade die entgegengesetzten Vorzeichen angenommen haben, wie unter Anwendung der zweiten Formel, dass man von der Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung sich weiter entfernen würde, wenn man bei übrigens gleichbleibender Form der Function im zweiten Gliede derselben eine höhere Potenz von l^{-1} als die dritte einführen wollte, vielmehr müsste der Exponent zwischen -2 und -3 liegen, wenn man einen Ausdruck bilden wollte, welcher die Beobachtungen besser wieder geben sollte, als die Formeln (8) und (9). Wir ziehen also das Resultat: Unter den binomischen rationalen Functionen von der Form

$$n = a + bl^{-k}$$

ist keine, welche die beobachteten Brechungsexponenten genügend darstellte. Am nächsten darunter kommt noch die Function $n = a + bl^{-2}$. Sollte eine binomische Function mit gebrochenen Exponenten gesucht werden, welche annähernd befriedigt, so müsste k zwischen 2 und 3 liegen.

Geht man nun darauf aus, einen dreigliedrigen rationalen Ausdruck zu finden, welcher der Erfahrung besser entspricht, so ist bei diesem Unternehmen keineswegs die Voraussetzung gestattet, die beiden ersten Glieder müssten die Form $a + bl^{-2}$

behalten; wenigstens vom Standpunkt der reinen Empirie würde diess eine vorgefasste Meinung sein, und es ist sehr denkbar, dass eine trinomische Function besser genügt, wenn ihr zweites Glied von einer andern, als der zweiten Potenz der Wellenlänge abhängt.

Bei trinomischen Functionen bringt es die Methode der Rechnung mit sich, dass einerseits noch mehr der vorderen Stellen als bisher im Lauf der Rechnung durch Subtraction verschwinden, andererseits bei Berechnung der vorkommenden höheren Potenzen durch Logarithmen sich die Ungenauigkeiten in den letzten Stellen steigern. Daher ist es nöthig, um die Genauigkeit der Rechnung aufrecht zu erhalten, die logarithmische Rechnung wenigstens zum grossen Theil aufzugeben und die erforderlichen Potenzen und Producte durch wirkliche Multiplication der Numeri zu bilden. Tafel V enthält eine Zusammenstellung aller so erhaltenen Zahlen, welche im nachfolgenden gebraucht werden.

Tafel V.

Potenzen von l^{-1} und Producte solcher mit den zugehörigen N ,
ohne Logarithmen berechnet.

	l^{-2}	l^{-3}	l^{-4}
<i>B</i>	2,11568007169	3,07733653522	4,47610216575
<i>C</i>	2,31814008517	3,52947016610	5,37377345447
<i>D</i>	2,87523986692	4,87540975932	8,26700429232
<i>E</i>	3,59534178342	6,81726651874	12,92648253960
<i>F</i>	4,22472498281	8,68355709932	17,84830118038
<i>G</i>	5,38212132844	12,48619823554	28,96722999405
<i>H</i>	6,33954803457	15,96200510023	40,18986928262
Σ	26,85079615302	55,43124341447	118,04876290919
	l^{-5}	l^{-6}	l^{-7}
<i>B</i>	6,51065958144	9,47000015100	13,7744727301
<i>C</i>	8,18180627145	12,45715965338	18,9665730868
<i>D</i>	14,01797250756	23,76962032127	40,3050334071
<i>E</i>	24,51040316353	46,47512278749	88,1232766225
<i>F</i>	36,68564061715	75,40416389713	154,9867424253
<i>G</i>	67,20223383463	155,90514637720	361,6905760407
<i>H</i>	101,19189806097	254,78560681983	641,5108984663
Σ	258,30061403673	578,26682000730	1319,3575727788

	l^{-8}	l^{-9}	l^{-10}
<i>B</i>	20,0354905983	29,1423774532	42,3886881854
<i>C</i>	28,8774411400	43,9671733509	66,9419538635
<i>D</i>	68,3433599693	115,8866388897	196,5035532227
<i>E</i>	167,0939508471	316,8332985264	600,7598632386
<i>F</i>	318,5618550248	654,7763627272	1345,8362274907
<i>G</i>	839,1004135292	1946,6625636066	4516,1402323644
<i>H</i>	1615,2255929526	4066,8891555239	10239,8002331828
Σ	3057,2381040613	7174,1575700779	17008,3707515481

	l^{-12}	l^{-16}	$l^{-1} N$
<i>B</i>	89,6809028599	401,420883515	2,36592201649
<i>C</i>	155,1808266299	833,906606790	2,47940192375
<i>D</i>	564,9948502175	4670,814851891	2,77013187289
<i>E</i>	2159,9370381125	27920,388409747	3,11065243150
<i>F</i>	5685,7879330257	101481,655476604	3,38478930949
<i>G</i>	24306,4146668966	704089,503985735	3,84842889072
<i>H</i>	64915,7054425504	2608953,716127150	4,20400451522
Σ	97877,7016602925	3448351,406341432	22,16333096006

	$l^{-2} N$	$l^{-3} N$	$l^{-4} N$
<i>B</i>	3,44132289101	5,00553406145	7,28073826076
<i>C</i>	3,77499840310	5,74760098669	8,75097511967
<i>D</i>	4,69718305005	7,96479359758	13,50552796773
<i>E</i>	5,89822830486	11,18385866069	21,20614667263
<i>F</i>	6,95714191049	14,29980395733	29,39201123820
<i>G</i>	8,92812389250	20,71271121373	48,05224602478
<i>H</i>	10,58503558101	26,65148856177	67,10434151341
Σ	44,28203403302	91,56579103924	195,29198679718

	$l^{-5} N$	$l^{-6} N$	N^2
<i>B</i>	10,5901086620	15,4037128456	2,64576249640
<i>C</i>	13,3237442408	20,2859862091	2,65188197160
<i>D</i>	22,9006920835	38,8316324366	2,66886623322
<i>E</i>	40,2097943426	76,2433451978	2,69130422988
<i>F</i>	60,4127390278	124,1731641726	2,71184484582
<i>G</i>	111,4783247932	258,6230182101	2,75177834595
<i>H</i>	168,9583919302	425,4111963517	2,78784132049
Σ	427,8737950801	958,9720554235	18,90927944336

	$l^{-2} N^2$	$l^{-4} N^2$
<i>B</i>	5,59758698806	11,8427032402
<i>C</i>	6,14743389950	14,2506129434
<i>D</i>	7,67363059324	22,0635286057
<i>E</i>	9,67615854959	34,7890971363
<i>F</i>	11,45679866965	48,4018235627
<i>G</i>	14,81040492689	79,7113962398
<i>H</i>	17,67365396400	112,0429782511
Σ	73,03566759093	323,1021399792

Versucht man zunächst die Formel

$$(13) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-2}$$

so bestimmen sich die Coefficienten a , b , c durch die Gleichungen

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-3})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-2} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-2} - 7 \Sigma l^{-3}) \Sigma l^{-2} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2) \Sigma l^{-2} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-2} - 7 \Sigma l^{-3}) \Sigma l^{-1} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 (\Sigma l^{-3})^2 - (\Sigma l^{-2})^3 \\ \quad - \Sigma l^{-4} (\Sigma l^{-1})^2 + 2 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} \end{array} \right.$$

Es findet sich

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-3})^2 = 97,0805225165 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} = -100,8080480183 = \xi$$

$$\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - (\Sigma l^{-2})^2 = 25,2541920292 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 = 105,376086313 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-2} - 7 \Sigma l^{-3} = -26,5513256161 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2 = 6,72816324763 = \kappa$$

$$\varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-1} + \eta \Sigma l^{-2} N$$

$$= 1116,865346845 - 2234,242131667 + 1118,306990913$$

$$= 0,930206091$$

$$\begin{aligned} \vartheta \Sigma l^{-1} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-2} N \\ = 2335,4850762367 - 1159,7487590318 - 1175,7467045517 \\ = -0,0103873468 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \Sigma l^{-2} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-1} N \\ = 297,9367539112 + 290,5374961817 - 588,4658170567 \\ = 0,0084330362 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J = 22187,922882935 - 21508,359225319 - 19358,491069935 \\ - 21393,671534902 + 40073,172464239 = 0,573517018 \end{aligned}$$

daher $a = 1,62193285$,

$$b = -0,018111663 = -n \log 0,25795832 - 2$$

$$c = 0,014704073 = n \log 0,16743765 - 2.$$

Man wird bemerken, dass bei der Bildung der numerischen Zahlenwerthe der Zähler und des Nenners der vorstehenden Coefficienten meist die ersten fünf geltenden Stellen durch Subtraction verschwinden, nachdem doch auch schon bei Bildung der Zahlen ε , ξ , . . . κ immer die erste oder auch die beiden ersten geltenden Stellen weggefallen waren, dass es also allerdings nöthig war, die Multiplicationen auf bedeutend mehr Stellen genau auszuführen, als der Gebrauch zehnstelliger Logarithmen gestattet, wenn die Genauigkeit der ersten sieben Stellen in den Resultaten gesichert sein sollte.

Setzt man die gefundenen Werthe von a , b , c in (13) ein und berechnet die zu den einzelnen Werthen der Wellenlänge gehörenden Werthe von n , so ergeben sich durch Subtraction der beobachteten Werthe N die Differenzen Δ , wie sie in folgender Tabelle enthalten sind.

Es dient zur Controle der Rechnung, dass $\Sigma \Delta = 0$; denn setzt man in den Ausdruck

$$\Sigma n - \Sigma N = 7a + b \Sigma l^{-1} + c \Sigma l^{-2} - \Sigma N$$

die durch die Gleichungen (14) bestimmten Werthe von a , b , c ein, so wird derselbe Null, eine Bemerkung, welche sich in analoger Weise für alle ferner angewendeten Formeln wiederholt.

Tafel VI.

$$n = 1,62193285 - 0,018111663 \, l^{-1} + 0,014704073 \, l^{-2}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6266979	1,6284431	1,6334995	1,6404568
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0001179	- 0,0000169	- 0,0001670	- 0,0000627
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6468266	1,6590540	1,6695476	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000586	+ 0,0002055	- 0,0001354	
$\Sigma \Delta =$	0,0000000			

Was nun die Grösse der Differenzen Δ in Tafel VI anlangt, so sind dieselben bedeutend kleiner, als die Differenzen in Tafel IV, No. 2; sie betragen nämlich nur etwa den fünften Theil der letzteren. Immerhin sind sie aber viel zu gross, um bei der Genauigkeit der Fraunhofer'schen Messungen als Beobachtungsfehler gelten zu können; denn nur in einem Falle, bei *C*, ist Δ kleiner, dagegen in vier Fällen mehr als doppelt so gross, als die grösste Differenz zweier Fraunhofer'scher Angaben über dasselbe Messungsobject, und einmal beläuft es sich auf mehr als das vierfache davon. Auch sieht man deutlich aus den Vorzeichen der Differenzen Δ in Tafel VI, dass die Verbesserung der angewendeten Formel (13) darin zu suchen ist, dass man den Exponenten von l^{-1} im letzten Gliede erhöht. Diess schliesst man aus folgender Betrachtung:

Gesetzt, man habe berechnet $n = a + bl^{-1} + cl^{-2}$, wie es nach den Formeln (13), (14) geschehen ist, in Wirklichkeit aber sei der Brechungsindex eine solche Function der Wellenlänge, dass der Exponent von l^{-1} im letzten Gliede höher sei, es sei z. B. genau $N = a' + b'l^{-1} + c'l^{-3}$, so würde sein

$$\Sigma N = 7a' + b' \Sigma l^{-1} + c' \Sigma l^{-3}$$

$$\Sigma l^{-1} N = a' \Sigma l^{-1} + b' \Sigma l^{-2} + c' \Sigma l^{-4}$$

$$\Sigma l^{-2} N = a' \Sigma l^{-2} + b' \Sigma l^{-3} + c' \Sigma l^{-5}$$

und man hätte

$$\begin{aligned}
 J.A &= J(a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-2}) - J(a' + b'\lambda^{-1} + c'\lambda^{-3}) \\
 &= (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} - (\Sigma\lambda^{-3})^2) (7a' + b' \Sigma\lambda^{-1} + c' \Sigma\lambda^{-3}) \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} - \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-4}) (a' \Sigma\lambda^{-1} + b' \Sigma\lambda^{-2} + c' \Sigma\lambda^{-4}) \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-3} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) (a' \Sigma\lambda^{-2} + b' \Sigma\lambda^{-3} + c' \Sigma\lambda^{-5}) \\
 &+ \lambda^{-1} (7 \Sigma\lambda^{-4} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) (a' \Sigma\lambda^{-1} + b' \Sigma\lambda^{-2} + c' \Sigma\lambda^{-4}) \\
 &+ \lambda^{-1} (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} - \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-4}) (7a' + b' \Sigma\lambda^{-1} + c' \Sigma\lambda^{-3}) \\
 &+ \lambda^{-1} (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} - 7 \Sigma\lambda^{-3}) (a' \Sigma\lambda^{-2} + b' \Sigma\lambda^{-3} + c' \Sigma\lambda^{-5}) \\
 &+ \lambda^{-2} (7 \Sigma\lambda^{-2} - (\Sigma\lambda^{-1})^2) (a' \Sigma\lambda^{-2} + b' \Sigma\lambda^{-3} + c' \Sigma\lambda^{-5}) \\
 &+ \lambda^{-2} (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-3} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) (7a' + b' \Sigma\lambda^{-1} + c' \Sigma\lambda^{-3}) \\
 &+ \lambda^{-2} (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} - 7 \Sigma\lambda^{-3}) (a' \Sigma\lambda^{-1} + b' \Sigma\lambda^{-2} + c' \Sigma\lambda^{-4}) \\
 &- 7a' \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} + 7a' (\Sigma\lambda^{-3})^2 + a' (\Sigma\lambda^{-2})^3 \\
 &+ a' \Sigma\lambda^{-4} (\Sigma\lambda^{-1})^2 - 2a' \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} \\
 &- 7b' \lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} + 7b' \lambda^{-1} (\Sigma\lambda^{-3})^2 + b' \lambda^{-1} (\Sigma\lambda^{-2})^3 \\
 &+ b' \lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-4} (\Sigma\lambda^{-1})^2 - 2b' \lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} \\
 &- 7c' \lambda^{-3} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} + 7c' \lambda^{-3} (\Sigma\lambda^{-3})^2 + c' \lambda^{-3} (\Sigma\lambda^{-2})^3 \\
 &+ c' \lambda^{-3} \Sigma\lambda^{-4} (\Sigma\lambda^{-1})^2 - 2c' \lambda^{-3} \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3}
 \end{aligned}$$

Da hierin alle Glieder verschwinden, welche a' und b' enthalten, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\begin{aligned}
 \frac{A \cdot J}{c} &= (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} - (\Sigma\lambda^{-3})^2) \Sigma\lambda^{-3} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} - \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-4}) \Sigma\lambda^{-4} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-3} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) \Sigma\lambda^{-5} \\
 &+ \lambda^{-1} [(7 \Sigma\lambda^{-4} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) \Sigma\lambda^{-4} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3} - \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-4}) \Sigma\lambda^{-3} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} - 7 \Sigma\lambda^{-3}) \Sigma\lambda^{-5}] \\
 &+ \lambda^{-2} [(7 \Sigma\lambda^{-2} - (\Sigma\lambda^{-1})^2) \Sigma\lambda^{-5} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-3} - (\Sigma\lambda^{-2})^2) \Sigma\lambda^{-3} \\
 &+ (\Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} - 7 \Sigma\lambda^{-3}) \Sigma\lambda^{-4}] \\
 &- \lambda^{-3} [7 \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-4} - 7 (\Sigma\lambda^{-3})^2 - (\Sigma\lambda^{-2})^3] \\
 &- \Sigma\lambda^{-4} (\Sigma\lambda^{-1})^2 + 2 \Sigma\lambda^{-1} \Sigma\lambda^{-2} \Sigma\lambda^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\text{also } A = \frac{c'}{J} (4,2039 - 6,6218\lambda^{-1} + 3,4090\lambda^{-2} - 0,57352\lambda^{-3})$$

Berechnet man hiernach die A für die sieben, den Linien $B, C, \dots H$ zukommenden Wellenlängen, so erhält man

$$A_b = \frac{c'}{J} (4,2039 - 9,6319 + 7,2123 - 1,7649) = 0,0194 \frac{c'}{J}$$

$$A_c = \frac{c'}{J} (4,2039 - 10,0823 + 7,9025 - 2,0242) = -0,0001 \frac{c'}{J}$$

$$\Delta_d = \frac{c'}{J} (4,2039 - 11,2286 + 9,8017 - 2,7961) = - 0,0191 \frac{c'}{J}$$

$$\Delta_e = \frac{c'}{J} (4,2039 - 12,5562 + 12,2565 - 3,9098) = - 0,0056 \frac{c'}{J}$$

$$\Delta_f = \frac{c'}{J} (4,2039 - 13,6110 + 14,4021 - 4,9802) = + 0,0148 \frac{c'}{J}$$

$$\Delta_g = \frac{c'}{J} (4,2039 - 15,3626 + 18,3477 - 7,1611) = + 0,0279 \frac{c'}{J}$$

$$\Delta_h = \frac{c'}{J} (4,2039 - 16,6732 + 21,6115 - 9,1545) = - 0,0123 \frac{c'}{J}$$

Man sieht hieraus, dass diejenigen Δ , welche sich in Tafel VI als Unterschiede zwischen den Resultaten der Rechnung und denen der Beobachtung finden, ihren Vorzeichen nach, wenn auch nicht völlig ihrer verhältnissmässigen Grösse nach, genau so wechseln, wie diejenigen Δ , welche sich ergeben müssten, wenn statt der in Gleichung (13) vorausgesetzten Function der Brechungsexponent durch die Formel

$$a + bl^{-1} + cl^{-3}$$

auszudrücken wäre.

Es liegt hierin hinreichende Veranlassung, zu versuchen, wie weit die Beobachtungen durch die Formel

$$(15) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-3}$$

befriedigt werden. Die Coefficienten a , b , c bestimmen sich dann durch die Gleichungen

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3}) \Sigma l^{-3} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-3} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2) \Sigma l^{-3} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-1} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - 7 (\Sigma l^{-4})^2 \\ \quad - \Sigma l^{-2} (\Sigma l^{-3})^2 - \Sigma l^{-6} (\Sigma l^{-1})^2 \\ \quad + 2 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} \end{array} \right.$$

Nun hat man

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2 = 1591,414081682 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6} = -1241,080440684 = \xi$$

$$\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} = 100,8080480183 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2 = 975,244993577 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-4} = -80,1218942841 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2 = 6,72816324763 = \kappa$$

$$\varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-1} N + \eta \Sigma l^{-3} N$$

$$= 18308,46388377 - 27506,47655494 + 9230,56865992$$

$$= 32,55598875$$

$$\vartheta \Sigma l^{-1} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-3} N$$

$$= 21614,677559785 - 14278,041577406 - 7336,424629685$$

$$= 0,211352694$$

$$\kappa \Sigma l^{-3} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-1} N$$

$$= 616,069590010 + 1159,748759032 - 1775,768060165$$

$$= 0,050288877$$

$$J = 108688,47154250 - 97548,57297073 - 82502,36702071$$

$$- 104797,79797680 + 176180,56493710 = 20,29851136$$

Hierdurch wird

$$a = 1,60386090, b = 0,010412226 = n \cdot \log 0,01754359 - 2$$

$$c = 0,0024774662 = n \cdot \log 0,39400775 - 3$$

Setzt man diese Werthe in (15) ein, berechnet die zu den einzelnen Werthen von l^{-1} gehörenden Werthe von n und subtrahirt die entsprechenden durch Beobachtung gefundenen Grössen N , so ergeben sich die in Tafel VII enthaltenen Resultate.

Tafel VII.

$$n = 1,60386090 + 0,010412226 l^{-1} + 0,0024774662 l^{-3}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6266299	1,6284581	1,6335951	1,6404935
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0000499	- 0,0000019	- 0,0000714	- 0,0000260
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6467755	1,6589508	1,6696226	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000075	+ 0,0001023	- 0,0000604	
	$\Sigma \Delta = 0,0000000.$			

Man sieht, dass die Formel (15) die Beobachtungen zwar besser befriedigt, als (13); denn nur in einem Falle, nämlich bei der Linie G , ist die Differenz Δ doppelt so gross als die grösste Differenz zweier Fraunhofer'schen Messungen desselben Objectes. Allein eben hieraus und aus dem Umstande, dass doch in vier Fällen diese Grenze erreicht oder überschritten wird, ergiebt sich, dass die Formel (15) noch nicht so weit, als man wünschen kann, mit der Erfahrung übereinstimmt. Auch erkennt man, analog der oben angeestellten Betrachtung, aus dem Gange der Vorzeichen in den Differenzen Δ , dass man der Erfahrung näher kommen wird, wenn man nochmals die Exponenten von l^{-1} im dritten Gliede erhöht. Denn gesetzt, man habe berechnet

$$n = a + b l^{-1} + c l^{-3},$$

wie diess durch (15) und (16) geschehen ist, in Wirklichkeit aber sei $N = a' + b' l^{-1} + c' l^{-4}$, so würden die einzelnen Differenzen $\Delta = n - N$ sein und da unter der jetzigen Voraussetzung wäre

$$\Sigma N = 7a' + b' \Sigma l^{-1} + c' \Sigma l^{-1}$$

$$\Sigma l^{-1} N = a' \Sigma l^{-1} + b' \Sigma l^{-2} + c' \Sigma l^{-5}$$

$$\Sigma l^{-3} N = a' \Sigma l^{-3} + b' \Sigma l^{-4} + c' \Sigma l^{-7}$$

so hätte man nach ähnlichen Transformationen wie oben

$$\begin{aligned} \frac{J \cdot \Delta}{c'} &= (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-4} \\ &+ (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-5} \\ &+ (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3}) \Sigma l^{-7} \\ &+ l^{-1} [(7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2) \Sigma l^{-5} \\ &+ (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-4} \\ &+ (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-7}] \\ &+ l^{-3} [(7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2) \Sigma l^{-7} \\ &+ (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3}) \Sigma l^{-4} \\ &+ (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-5}] \\ &- l^{-4} [7 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - 7 (\Sigma l^{-4})^2 \\ &- \Sigma l^{-2} (\Sigma l^{-3})^2 - \Sigma l^{-6} (\Sigma l^{-1})^2 \\ &+ 2 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4}] \end{aligned}$$

$$\text{also } \Delta = \frac{c'}{J} (294,4853 - 311,0580 l^{-1} + 81,58400 l^{-3} - 20,298511 l^{-4})$$

Berechnet man hiernach Δ für die sieben, den Strahlen $B, C, \dots H$ zukommenden Wellenlängen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_b &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 452,4456 + 251,0615 - 90,8582) = + 2,2430 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_c &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 473,5994 + 287,9483 - 109,0796) = - 0,2454 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_d &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 527,4465 + 397,7554 - 167,8079) = - 3,0137 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_e &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 589,8091 + 556,1800 - 262,3883) = - 1,5321 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_f &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 639,3527 + 708,4393 - 362,2939) = + 1,2780 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_g &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 721,6358 + 1018,6740 - 587,9917) = + 3,5318 \frac{c'}{J} \\
 \mathcal{A}_h &= \frac{c'}{J} (294,4853 - 783,1960 + 1302,2442 - 815,7944) = - 2,2609 \frac{c'}{J}
 \end{aligned}$$

Man erkennt nun, dass diejenigen \mathcal{A} , welche in Tafel VII als Differenzen zwischen den nach Formel (15) berechneten und den beobachteten Werthen der Brechungsexponenten aufgeführt sind, nicht allein ihrem Vorzeichen nach, sondern auch nahezu ihrer verhältnissmässigen Grösse nach so wechseln, wie diejenigen \mathcal{A} , welche sich ergeben müssten, wenn nicht Formel (15), sondern die Formel $n = a' + b'l^{-1} + c'l^{-4}$ diejenige wäre, welche den Beobachtungen vollkommen genüge.

Hierdurch veranlasst begeben wir uns zu dem Versuche, wie genau die Beobachtungen wiedergegeben werden durch die Formel (17)

$$n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$$

wobei sich die Coefficienten a, b, c bestimmen durch die Gleichungen

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned}
 a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-5})^2) \Sigma N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-1} N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-4} N \} \\
 b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-1} N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-8}) \Sigma N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-4} N \} \\
 c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2) \Sigma l^{-4} N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4}) \Sigma N \\
 &\quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-1} N \} \\
 J &= 7 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - 7 (\Sigma l^{-5})^2 \\
 &\quad - \Sigma l^{-2} (\Sigma l^{-4})^2 - \Sigma l^{-8} (\Sigma l^{-1})^2 \\
 &\quad + 2 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5}
 \end{aligned} \right.$$

Nun findet man

$$\begin{aligned}
 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-5})^2 &= 15370,06991164 = \varepsilon \\
 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-8} &= -10664,69463111 = \xi \\
 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} &= 307,5584566295 = \eta \\
 7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2 &= 7465,156304039 = \vartheta \\
 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-5} &= -218,9232328085 = \iota \\
 7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2 &= 6,72816324763 = \kappa \\
 \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-1} N + \eta \Sigma l^{-4} N &= 176825,3612353 \\
 - 236365,1566973 + 60063,7020514 &= 523,9065894 \\
 \vartheta \Sigma l^{-1} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-4} N &= 165452,72968350 \\
 - 122692,25133335 + 42753,95309123 &= 6,52541038 \\
 \kappa \Sigma l^{-4} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-1} N &= 1313,95636813 \\
 + 3538,31410703 - 4852,06806358 &= 0,20241158 \\
 J = 574624,9398638 - 467034,4504823 - 374179,5496936 \\
 - 554055,3428127 + 820972,8900419 &= 328,4869171
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
 a &= 1,59490854, \quad b = 0,019865054 = n \log 0,29808975 - 2 \\
 c &= 0,00061619373 = n \log 0,78971727 - 4
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (17) ein und berechnet daraus die den Strahlen $B, C, \dots H$ zukommenden Brechungsexponenten, so ergeben sich durch Zusammenstellung der so berechneten n mit den beobachteten Werthen N die in nachfolgender Tafel enthaltenen Δ .

Tafel VIII.

$$n = 1,59490854 + 0,019865054 l^{-1} + 0,00061619373 l^{-4}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6265612	1,6284652	1,6336869	1,6405407
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N =$	$-0,0000188$	$+0,0000052$	$+0,0000204$	$+0,0000212$
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6467375	1,6588437	1,6696904	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N =$	$-0,0000305$	$-0,0000048$	$+0,0000074$	
	$\Sigma \Delta = +0,0000001$			

Die Grösse der einzelnen Abweichungen zwischen berechneten

und beobachteten Werthen erreicht nun hier nirgends die gesteckte Grenze 0,000049 und ist überhaupt in der befriedigendsten Weise so, wie man sie nach der Präcision der Fraunhofer'schen Beobachtungen erwarten und gestatten darf. Denn die Mittelwerthe der beiden Beobachtungsreihen über Flintglas No. 23, welche wir zu Grunde gelegt haben, weichen von den unmittelbar beobachteten Grössen einmal um 0,0000245, einmal um 0,0000160, einmal um 0,0000120, einmal um 0,0000090, einmal um 0,0000030 und zweimal um 0,0000005 ab und diese Zahlen, von denen man in Betracht ziehen muss, dass sie nicht die wahren Beobachtungsfehler, sondern etwas kleiner als diese sind, sind den Δ der Tafel VIII durchaus vergleichbar. Auch zeigt sich, dass nicht etwa durch eine noch weitere Erhöhung des Exponenten von l^{-1} im letzten Gliede eine noch bessere Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erzielt wird. Um hierüber eine völlig klare Einsicht zu gewinnen, unterwerfen wir noch die Formel

$$(19) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-5}$$

der Probe, deren Coefficienten a, b, c sich bestimmen durch

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-5} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-5} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-5})^2) \Sigma l^{-1} N \\ \quad + (\Sigma l^{-5} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-10}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-5} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2) \Sigma l^{-5} N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-1} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - 7 (\Sigma l^{-6})^2 - \Sigma l^{-2} (\Sigma l^{-5})^2 \\ \quad - \Sigma l^{-10} (\Sigma l^{-1})^2 + 2 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} \Sigma l^{-6} \end{array} \right.$$

Nun findet sich

$$\begin{aligned} \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-6})^2 &= 122295,7808234 = \varepsilon \\ \Sigma l^{-5} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-10} &= -79601,2542148 = \xi \\ \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} &= 849,0930185806 = \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-5})^2 &= 52339,3880491 = \vartheta \\
 \Sigma l^{-1} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-6} &= -570,6060144310 = \iota \\
 7 \Sigma l^{-2} - (\Sigma l^{-1})^2 &= 6,72816324763 = \kappa \\
 \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-1} N + \eta \Sigma l^{-5} N &= 1406954,929026 \\
 - 1764228,941997 + 363304,652236 &= 6030,639265 \\
 \vartheta \Sigma l^{-1} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-5} N &= 1160015,179579 \\
 - 915774,658946 - 244147,360890 &= 93,159743 \\
 \kappa \Sigma l^{-5} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-1} N &= 2878,80474268 \\
 + 9768,41228413 - 12646,52994563 &= 0,68708118 \\
 J = 3196818,071614 - 2340747,605850 - 1791463,832334 \\
 - 3082382,976621 + 4021570,160815 &= 3793,817624
 \end{aligned}$$

Hierdurch wird

$$\begin{aligned}
 a &= 1,58959651, \quad b = 0,024555672 = n \log 0,39015183 - 2, \\
 c &= 0,00018110548 = n \log 0,25793160 - 4
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (19) ein und berechnet die den Wellenlängen der Linien *B, C, . . H* zukommenden Brechungsexponenten, so erhält man die in der folgenden Tafel nebst den entsprechenden Δ zusammengestellten Grössen.

Tafel IX.

$n = 1,58959651 + 0,024555672 l^{-1} + 0,00018110548 l^{-5}$				
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6264928	1,6284654	1,6337731	1,6405964
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N =$	$-0,0000872 + 0,0000054 + 0,0001066 + 0,0000769$			
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6467125	1,6587349	1,6697503	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N =$	$-0,0000555 - 0,0001136 + 0,0000673$			
	$\Sigma \Delta = -0,0000001$			

Die Δ der Tafel IX sind weit grösser als die der Tafel VIII; sie übersteigen sechsmal den grössten Unterschied zweier Fraunhofer'schen Messungen desselben Brechungsexponenten und zweimal das Doppelte desselben; also ist Formel (19) nicht geeignet, die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge auszudrücken. Es ist gut zu

bemerken, wie die zu starke Steigerung der Potenz von l^{-1} im letzten Gliede, während die beiden ersten unverändert bleiben, insbesondere die charakteristische Wirkung hat, dass Δ in der Linie G beträchtlich negativ, in der Linie H beträchtlich positiv wird, wohingegen bei einem zu niedrigen Exponenten von l^{-1} im letzten Gliede das Δ in G beträchtlich positiv, in H beträchtlich negativ ist.

Stellen wir nachträglich noch die Differenzen zusammen, welche sich zwischen den nach den Formeln (13), (15), (17), (19) berechneten und den beobachteten Brechungsexponenten ergeben haben

Tafel X.

Differenzen zwischen den nach (13), (15), (17), (19) berechneten und den beobachteten Brechungsexponenten in Einheiten der sechsten Decimale.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n = a + bl^{-1} + cl^{-2} +$	117,9	— 16,9	— 167,0	— 62,7
$n = a + bl^{-1} + cl^{-3} +$	49,9	— 1,9	— 71,4	— 26,0
$n = a + bl^{-1} + cl^{-4} —$	18,8	+ 5,2	+ 20,4	+ 21,2
$n = a + bl^{-1} + cl^{-5} —$	87,2	+ 5,4	+ 106,6	+ 76,9
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n = a + bl^{-1} + cl^{-2} +$	58,6	+ 205,5	— 135,4	
$n = a + bl^{-1} + cl^{-3} +$	7,5	+ 102,3	— 60,4	
$n = a + bl^{-1} + cl^{-4} —$	30,5	— 4,8	+ 7,4	
$u = a + bl^{-1} + cl^{-5} —$	55,5	— 113,6	+ 67,3	

so überhebt uns ein Anblick dieser Tabelle vollständig der Mühe, noch weitere Steigerungen des Exponenten von l^{-1} im dritten Gliede der Function bei gleich bleibenden Exponenten im ersten und zweiten Gliede vorzunehmen. Denn die Differenzen haben in der ersten bis dritten Reihe allmählich bis auf ein, der Präcision der Beobachtungen gerade entsprechendes Minimum abgenommen und sind in der vierten unter Umkehrung der Vorzeichen, verglichen mit den ersten beiden Reihen, bereits wieder beträchtlich gestiegen, so dass man deutlich erkennt, eine Function, welche neben den Gliedern $a + bl^{-1}$ im dritten Gliede die sechste oder eine höhere Potenz von l^{-1} enthielte, würde noch weniger, als die Function $a + bl^{-1} + cl^{-5}$ die Brechungsexponenten auszudrücken geeignet sein.

Ist somit erwiesen, dass die Function $n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$ den Beobachtungen über die Lichtbrechung im Flintglas No. 23 vollkommene Genüge leistet, und zwar als die einzige von allen trinomischen rationalen Functionen, deren erste Glieder a und bl^{-1} sind, so erhebt sich die Frage, ob etwa eine andere trinomische rationale Function, deren zweites Glied nicht bl^{-1} ist, ebenso gut oder besser den Dienst leistet. Um in keiner Beziehung einer vorgefassten Meinung uns hinzugeben, und um mit Regelmässigkeit und möglichst erschöpfender Vollständigkeit das Ziel zu verfolgen, ordnen wir den Gang der Untersuchung so, dass wir successive die Functionen $a + bl^{-2} + cl^{-3}$, $a + bl^{-2} + cl^{-4}$ u. s. f. der Probe unterwerfen.

Setzt man

$$21) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-3}$$

so bestimmen sich die Coefficienten a, b, c durch die Gleichungen

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-5})^2) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4}) \Sigma l^{-3} N \} \\ b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-3} N \} \\ c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-3} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-2} N \} \\ J &= 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - 7 (\Sigma l^{-5})^2 - \Sigma l^{-4} (\Sigma l^{-3})^2 \\ &\quad - \Sigma l^{-6} (\Sigma l^{-2})^2 + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-5} \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-5})^2 = 1544,475521541 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} = -1209,000295294 = \xi$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-4} = 391,9874221039 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2 = 975,244993577 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-3} - 7 \Sigma l^{-5} = -319,7312808268 = \iota$$

$$\begin{aligned}
 7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 &= 105,3760863133 = \kappa \\
 \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-2} N + \eta \Sigma l^{-3} N &= 17768,4580217 \\
 - 53536,9922222 + 35892,6383824 &= 124,1041819 \\
 \vartheta \Sigma l^{-2} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-3} N &= 43185,831996108 \\
 - 13908,974726722 - 29276,447648891 &= 0,409620495 \\
 \kappa \Sigma l^{-3} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-2} N &= 9648,844699895 \\
 + 4509,629293274 - 14158,351458991 &= 0,122534178 \\
 J = 477845,77913305 - 467034,45048227 - 362719,31410791 \\
 - 416910,28479586 + 768895,32863593 &= 77,05838294
 \end{aligned}$$

Hierdurch wird

$$\begin{aligned}
 a &= 1,61052149, \quad b = 0,0053157162 = n \log 0,72556179 - 3 \\
 c &= 0,0015901473 = n \log 0,20143735 - 3
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (21) ein und berechnet darnach die zu den Wellenlängen der Strahlen $B, C, \dots H$ gehörenden Brechungsexponenten, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von n nebst den Differenzen Δ .

Tafel XI.

$$n = 1,61052149 + 0,0053157162 l^{-2} + 0,0015901473 l^{-3}$$

	B	C	D	E
$n =$	1,6266613	1,6284564	1,6335581	1,6404738
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0000813	0,0000036	0,0001084	0,0000457
	F	G	H	
$n =$	1,6467871	1,6589862	1,6696027	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000191	0,0001377	0,0000803	
$\Sigma \Delta = +$	0,0000001			

Die Differenzen dieser Tafel übersteigen viermal die oft genannte Grösse 0,000049 und erreichen fast das Dreifache derselben, so dass man nicht sagen kann, die Formel (21) drücke die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Wellenlänge mit einer der Präcision der Beobachtungen entsprechenden Genauigkeit aus.

Legt man ferner die Function

$$(23) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$$

zu Grunde, so bestimmen sich die Coefficienten a , b , c durch die Gleichungen

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-2} N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-4} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-2} N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-4} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-4} N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-2} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} - 7 (\Sigma l^{-6})^2 - (\Sigma l^{-4})^3 \\ \quad - \Sigma l^{-8} (\Sigma l^{-2})^2 + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} \end{array} \right.$$

Es findet sich nun

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-6})^2 = 26510,66098189 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} = -13825,59439010 = \xi$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2 = 1591,414081682 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2 = 7465,156304039 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-6} = -878,1644710605 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 = 105,3760863133 = \kappa$$

$$\varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-2} N + \eta \Sigma l^{-4} N = 304992,575288$$

$$- 612225,441309 + 310790,417829 = 3557,551807$$

$$\vartheta \Sigma l^{-2} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-4} N = 330572,305517$$

$$- 159056,903214 - 171498,484288 = 16,918015$$

$$\kappa \Sigma l^{-4} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-2} N = 20579,10525703$$

$$+ 18308,46388377 - 38886,90899409 = 0,66014671$$

$$J = 2526322,232723 - 2340747,605850 - 1645069,766107$$

$$- 2204162,446389 + 3665868,459452 = 2210,873829$$

Hierdurch wird

$$a = 1,60911571, \quad b = 0,0076521850 = n \log 0,88378546 - 3$$

$$c = 0,00029859086 = n \log 0,47507650 - 4$$

Berechnet man mit diesen Constanten nach Gleichung (23) die den Strahlen $B, C, \dots H$ zukommenden Brechungsexponenten, so ergeben sich die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen und mit den beobachteten Grössen N verglichenen Resultate.

Tafel XII.

$$n = 1,60911571 + 0,0076521850 \, l^{-2} + 0,00029859086 \, l^{-4}$$

	B	C	D	E
$n =$	1,6266418	1,6284591	1,6335860	1,6404877
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0000618	0,0000009	0,0000805	0,0000318
	F	G	H	
$n =$	1,6467734	1,6589500	1,6696274	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000054	0,0001015	0,0000556	

Die Grössen von Δ übersteigen unter sieben Fällen viermal die zugestandene Grenze 0,000049 und erheben sich einmal bis über das Doppelte davon, sind also entschieden zu gross, um bei der Präcision von Fraunhofers Beobachtungen als Beobachtungsfehler gelten zu können.

Die Ehrfurcht gegen die Cauchy'schen Formeln über die Brechung des Lichts gebietet uns hier, die natürliche Reihenfolge der zu prüfenden Formeln für einen Augenblick zu unterbrechen, und die Untersuchung einzuschalten, ob die unmittelbar aus Cauchy's Deductionen hervorgehende Formel

$$(25) \quad n^2 = a + b \, l^{-2} + c \, l^{-4}$$

besseres leistet. Denn wenn auch unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der rechten Seite rasch abnehmen, ohne merklichen Fehler aus ihr die Formel (23) folgt, so könnte man doch glauben, dass die kleinen Vernachlässigungen, die man sich dabei gestattet, obige als zu gross befundenen Differenzen herbeiführen. Die Constanten der Formel (25) bestimmen sich durch die Gleichungen

$$(26) \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-2} N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-4} N^2 \} \\ b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-2} N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8}) \Sigma N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-4} N^2 \} \\ c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-4} N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma N^2 \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} - 7 \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-2} N^2 \} \\ J &= 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} - 7 (\Sigma l^{-6})^2 - (\Sigma l^{-4})^3 \\ &\quad - \Sigma l^{-8} (\Sigma l^{-2})^2 + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} \end{aligned} \right.$$

Indem $\varepsilon, \xi, \eta, \vartheta, \iota, \kappa$ dieselbe Bedeutung haben, wie in der numerischen Berechnung der Formel (23), so findet sich

$$\begin{aligned} \varepsilon \Sigma N^2 + \xi \Sigma l^{-2} N^2 + \eta \Sigma l^{-4} N^2 &= 501297,496735 \\ - 1009761,516122 + 514189,295384 &= 5725,275997 \\ \vartheta \Sigma l^{-2} N^2 + \xi \Sigma N^2 + \iota \Sigma l^{-4} N^2 &= 545222,674336 \\ - 261432,027793 - 283736,819853 &= 53,826690 \\ \kappa \Sigma l^{-4} N^2 + \eta \Sigma N^2 + \iota \Sigma l^{-2} N^2 &= 34047,2389905 \\ + 30092,4935806 - 64137,3283985 &= 2,4041726 \\ J &= 2210,873829 \end{aligned}$$

Hierdurch wird

$$\begin{aligned} a &= 2,58959870, \quad b = 0,024346342 = n \log 0,38643371 - 2 \\ c &= 0,0010874309 = n \log 0,03640168 - 3 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (25) ein und berechnet die zu den Wellenlängen der Strahlen $B, C, \dots H$ gehörenden Werthe der Function, so erhält man die in der nachfolgenden Tabelle verzeichneten Werthe n^2 . Dieselben sind zunächst verglichen mit den Quadraten N^2 der beobachteten Brechungsexponenten; die Differenzen tragen die Bezeichnung \mathcal{A}' , und dass $\Sigma \mathcal{A}' = 0$ dient zur Controle der Rechnung. Es sind ferner daselbst die aus den berechneten Werthen n^2 sich ergebenden n mitgetheilt und mit den be-

obachteten Brechungsexponenten N verglichen; die hierbei sich findenden Differenzen sind Δ genannt.

Tafel XIII.

$$n^2 = 2,58959870 + 0,024346342 t^{-2} + 0,0010874309 t^{-4}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n^2 =$	2,6459752	2,6518805	2,6685901	2,6911888
$N^2 =$	2,6457625	2,6518820	2,6688662	2,6913042
$\Delta' = n^2 - N^2 = +$	0,0002127	0,0000015	0,0002761	0,0001154

	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
$n^2 =$	2,7118641	2,7521335	2,7876472
$N^2 =$	2,7118448	2,7517783	2,7878413
$\Delta' = n^2 - N^2 = +$	0,0000193	0,0003552	0,0001941

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6266398	1,6284596	1,6335820	1,6404843
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0000598	0,0000004	0,0000845	0,0000352

	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
$n =$	1,6467738	1,6589556	1,6696249
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830
$\Delta = n - N = +$	0,0000058	0,0001071	0,0000581

Nennen wir hier einen Augenblick die Coefficienten der Gleichung (25) a, β, γ und behalten für die der Gleichung (23) die Bezeichnung a, b, c , so ist, wie zu erwarten stand, nicht etwa genau $\alpha = a^2$, noch $\beta = 2ab$, noch $\gamma = b^2 + 2ac$, wobei doch Vernachlässigungen kleiner Grössen eintreten würden. Wäre diess der Fall, so müsste Formel (25) offenbar zu grösseren Differenzen gegen die Beobachtung führen als (23); vielmehr sind die Coefficienten der Formel (25) so vorthellhaft als möglich für den Zweck, dass die Summe der Quadrate von Δ' ein Minimum ist; und man könnte nun glauben, dass sie besser mit der Erfahrung übereinstimmen, als (23); gleichwohl giebt sie keine grössere Annäherung an die Data der Beobachtung, als diese letztere; denn die Differenzen Δ übersteigen gleichfalls viermal die Grenze 0,000049 und erheben sich gleichfalls einmal bis über das Doppelte dieser Grösse.

Wir nehmen nun die durch Formel (25) unterbrochene Reihe der Functionen für n wieder auf und setzen

$$(27) \quad n = a + b l^{-2} + c l^{-5}$$

dann ist

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-7})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-5} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-2} N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5}) \Sigma l^{-5} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-5})^2) \Sigma l^{-2} N \\ \quad + (\Sigma l^{-5} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-7}) \Sigma l^{-5} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-5} N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-7}) \Sigma l^{-2} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - 7 (\Sigma l^{-7})^2 - \Sigma l^{-4} (\Sigma l^{-5})^2 \\ \quad - \Sigma l^{-10} (\Sigma l^{-2})^2 + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} \Sigma l^{-7} \end{array} \right.$$

Hiervon sind die numerischen Werthe

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-7})^2 = 267112,7214723 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-5} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} = -115897,4247620 = \xi$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-7} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-5} = 4933,733293907 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-10} - (\Sigma l^{-5})^2 = 52339,388049085 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-5} - 7 \Sigma l^{-7} = -2299,9258757515 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 = 105,3760863133 = \kappa$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-2} N + \eta \Sigma l^{-5} N &= 3073005,11555 \\ &- 5132173,70765 + 2111015,18838 = 51846,59628 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta \Sigma l^{-2} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-5} N &= 2317694,56286 \\ &- 1333344,87856 - 984078,01286 = 271,67144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \Sigma l^{-5} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-2} N &= 45087,6659616 \\ &+ 56760,2604900 - 101845,3959035 = 2,5305481 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= 14054719,88425 - 12184930,83394 - 7876119,87363 \\ &- 12262444,33988 + 18301012,42588 = 32237,26268 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$a = 1,60828160, \quad b = 0,0084272489 = n \log 0,92568582 - 3$$

$$c = 0,000078497610 = n \log 0,89485643 - 5$$

Setzt man diese Werthe in (27) ein, berechnet die zu

den Strahlen $B, C, \dots H$ gehörenden Brechungsexponenten und subtrahirt von den so berechneten Werthen die beobachteten Brechungsexponenten, so finden sich die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Differenzen.

Tafel XIV.

$$n = 1,60828160 + 0,0084272489 l^{-2} + 0,000078497610 l^{-5}$$

	B	C	D	E
$n =$	1,6266220	1,6284594	1,6336123	1,6405045
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0000420	0,0000006	0,0000542	0,0000150
	F	G	H	
$n =$	1,6467641	1,6589133	1,6696499	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = -$	0,0000039	0,0000648	0,0000331	
$\Sigma \Delta = 0,0000000$				

Die Differenzen übersteigen zweimal die Grenze 0,000049 und kommen ihr ausserdem zweimal ziemlich nahe, so dass auch die Formel (27) nicht geeignet erscheinen kann, die Brechungsexponenten in Flintglas No. 23 mit genügender Genauigkeit auszudrücken.

Sei nun

$$(29) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-6}$$

dann bestimmen sich die Coefficienten a, b, c durch die Gleichungen

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-8})^2) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-12}) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6}) \Sigma l^{-6} N \} \\ b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-12}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-6} N \} \\ c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-6} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-2} N \} \\ J &= 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12} - 7 (\Sigma l^{-8})^2 - \Sigma l^{-4} (\Sigma l^{-6})^2 \\ &\quad - \Sigma l^{-12} (\Sigma l^{-2})^2 + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8} \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-8})^2 = 2207636,772468 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-12} = -860194,8587660 = \xi$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} = 13825,59439010 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2 = 350751,3965007 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-8} = -5873,742222357 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 = 105,3760863133 = \kappa$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-2} N + \eta \Sigma l^{-6} N &= 25397813,5436 \\ &- 38091178,0109 + 13258358,6697 = 564994,2024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta \Sigma l^{-2} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-6} N &= 15531985,27697 \\ &- 9896133,68764 - 5632754,65200 = 3096,93733 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \Sigma l^{-6} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-2} N &= 101052,7220843 \\ &+ 159056,9032136 - 260101,2529916 = 8,3723063 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= 80880391,1817 - 65426933,7745 - 39474622,7362 \\ &- 70566422,0434 + 94939010,4777 = 351423,1053 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} a &= 1,60773209, \quad b = 0,0088125604 = n \log 0,94510210 - 3 \\ c &= 0,000023824006 = n \log 0,37701480 - 5 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (29) ein und berechnet die zu den Wellenlängen der Strahlen $B, C, \dots H$ gehörenden Brechungsexponenten, so ergeben sich die in der nachfolgenden Tafel enthaltenen Werthe von n nebst den zugehörigen Differenzen Δ zwischen den Resultaten der Rechnung und denen der Beobachtung.

Tafel XV.

$$n = 1,60773209 + 0,0088125604 l^{-2} + 0,000023824006 l^{-6}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6266023	1,6284576	1,6336366	1,6405235
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N =$	$+ 0,0000223$	$- 0,0000024$	$- 0,0000299$	$+ 0,0000040$
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6467592	1,6588766	1,6696697	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N =$	$- 0,0000088$	$+ 0,0000281$	$- 0,0000133$	
$\Sigma \Delta = 0,0000000$				

Die einzelnen Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen sind hier fast genau so gross, wie für die aus Formel (17) folgenden in Tafel VIII; denn dort war die grösste absolute Differenz 0,0000305, hier 0,0000299, dort war die Summe der Quadrate der Abweichungen in Einheiten der vierzehnten Decimale 225413, hier 245700; die Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-6}$ genügt also den Beobachtungen Fraunhofers über die Lichtbrechung in Flintglas No. 23 fast ebensogut, wie die Formel $n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$.

Wir halten es deshalb zunächst nicht für geboten, noch eine weitere Steigerung des Exponenten im dritten Gliede eintreten zu lassen, und etwa die Functionen $a + bl^{-2} + cl^{-7}$ u. s. f. zur Discussion zu bringen, sondern wollen vielmehr, um doch im Bereich der sechsten Potenz von l^{-1} mit Vollständigkeit alles übersehen zu können, noch für die Functionen $a + bl^{-3} + cl^{-6}$ und $a + bl^{-4} + cl^{-6}$ die Rechnung durchführen.

Nimmt man zunächst an, es sei

$$(31) \quad n = a + bl^{-3} + cl^{-6}$$

so bestimmen sich die Constanten dieser Formel durch die Gleichungen

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-9})^2 \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-9} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-12}) \Sigma l^{-3} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-9} - (\Sigma l^{-6})^2 \Sigma l^{-6} N) \} \\ b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma l^{-3} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-9} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-12}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-9}) \Sigma l^{-6} N \} \\ c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2) \Sigma l^{-6} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-9} - (\Sigma l^{-6})^2 \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-9}) \Sigma l^{-3} N \} \\ J &= 7 \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-12} - 7 (\Sigma l^{-9})^2 - (\Sigma l^{-6})^3 \\ &\quad - \Sigma l^{-12} (\Sigma l^{-3})^2 + 2 \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-9} \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-9})^2 = 5130890,44842 = \varepsilon$$

$$\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-9} - \Sigma l^{-3} \Sigma l^{-12} = -1276905,421300 = \xi$$

$$\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-9} - (\Sigma l^{-6})^2 = 63279,9594394 = \eta$$

$$7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2 = 350751,3965007 = \vartheta$$

$$\Sigma l^{-3} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-9} = -18165,05413221 = \iota$$

$$7 \Sigma l^{-6} - (\Sigma l^{-3})^2 = 975,244993577 = \kappa$$

$$\varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-3} N + \eta \Sigma l^{-6} N = 59028460,0015$$

$$- 116920854,9836 + 60683712,7707 = 2791317,7886$$

$$\vartheta \Sigma l^{-3} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-6} N = 32116829,0787$$

$$- 14690190,9804 - 17419779,2981 = 6858,8003$$

$$\kappa \Sigma l^{-6} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-3} N = 935232,696032$$

$$+ 728005,907010 - 1663297,550886 = -58,947844$$

$$J = 396195991,0210 - 360279757,8821 - 193368096,3535$$

$$- 300741252,4940 + 459921594,5374 = 1728478,8288$$

also ist

$$a = 1,61489845, \quad b = 0,0039681135 = n \log 0,59858409 - 3$$

$$c = -0,000034103886 = -n \log 0,53280386 - 5$$

Hieraus berechnen sich aber für die Linien $B, C, \dots H$ die in der nachfolgenden Tafel enthaltenen Brechungsexponenten nebst den zugehörigen Differenzen zwischen den Resultaten der Rechnung und der Beobachtung.

Tafel XVI.

$$n = 1,61489845 + 0,0039681135 l^{-3} - 0,000034103886 l^{-6}$$

	B	C	D	E
$n =$	1,6267867	1,6284790	1,6334340	1,6403652
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0002067	+ 0,0000190	- 0,0002325	- 0,0001543
	F	G	H	
$n =$	1,6467842	1,6591281	1,6695483	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000162	+ 0,0002796	- 0,0001347	

$$\Sigma \Delta = 0,0000000$$

Die Δ der Tafel XVI sind in mehreren Fällen vier- bis fünfmal so gross, als die von uns acceptirte Grenze 0,000049 der Beobachtungsfehler, mithin können wir nicht sagen, dass Formel (31) mit genügender Genauigkeit die Resultate der Beobachtung darstelle.

Soll ferner sein

$$(33) \quad n = a b l^{-4} + c l^{-6}$$

so bestimmen sich die Coefficienten a, b, c durch die Gleichungen

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-8} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-10})^2) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12}) \Sigma l^{-4} N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-6} N \} \\ b = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2) \Sigma l^{-4} N \\ \quad + (\Sigma l^{-6} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-6} N \} \\ c = \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2) \Sigma l^{-6} N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8}) \Sigma N \\ \quad + (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-4} N \} \\ J = 7 \Sigma l^{-8} \Sigma l^{-12} - 7 (\Sigma l^{-10})^2 \\ \quad - \Sigma l^{-8} (\Sigma l^{-6})^2 - \Sigma l^{-12} (\Sigma l^{-4})^2 \\ \quad + 2 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-10} \end{array} \right.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \Sigma l^{-8} \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-10})^2 &= 9950763,431665 = \varepsilon \\ \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-12} &= -1718965,1293890 = \xi \\ \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-6} \Sigma l^{-8} &= 239917,7698804 = \eta \\ 7 \Sigma l^{-12} - (\Sigma l^{-6})^2 &= 350751,39650068 = \vartheta \\ \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-6} - 7 \Sigma l^{-10} &= -50794,91252754 = \iota \\ 7 \Sigma l^{-8} - (\Sigma l^{-4})^2 &= 7465,156304039 = \kappa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Sigma N + \xi \Sigma l^{-4} N + \eta \Sigma l^{-6} N \\ = 114478811,644 - 335700115,353 + 230074436,915 \\ = 8853133,206 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta \Sigma l^{-4} N + \xi \Sigma N + \iota \Sigma l^{-6} N \\ = 68498937,0945 - 19775878,1647 - 48710901,6716 \\ = 12157,2582 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \Sigma l^{-6} N + \eta \Sigma N + \iota \Sigma l^{-4} N \\ = 7158876,28494 + 2760140,10149 - 9919839,38669 \\ = -823,00026 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= 2094648073,376 - 2024992729,355 - 1022317538,942 \\ &- 1363975731,802 + 2322108049,588 = 5470122,865 \end{aligned}$$

folglich ist

$$a = 1,61845235, \quad b = 0,0022224836 = n \cdot \log 0,34683856 - 3$$

$$c = -0,00015045371 = -n \cdot \log 0,17740289 - 4.$$

Setzt man diese Werthe in (33) ein und berechnet die zu den Wellenlängen der Strahlen $B, C, \dots H$ gehörenden Brechungsexponenten, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe nebst den daraus folgenden Differenzen Δ .

Tafel XVII.

$$n = 1,61845235 + 0,0022224836 \, l^{-1} - 0,00015045371 \, l^{-6}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,6269756	1,6285212	1,6332494	1,6401889
$N =$	1,6265800	1,6284600	1,6336665	1,6405195
$\Delta = n - N = +$	0,0003956	+ 0,0000612	- 0,0004171	- 0,0003306
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,6467751	1,6593750	1,6694402	
$N =$	1,6467680	1,6588485	1,6696830	
$\Delta = n - N = +$	0,0000071	+ 0,0005265	- 0,0002428	
$\Sigma \Delta = - 0,0000001$				

Man sieht, dass die durch Formel (33) berechneten Werthe viel zu weit von den beobachteten sich entfernen, als dass man jene Formel für einen richtigen Ausdruck des Brechungsgesetzes halten könnte; denn die Differenzen der Tafel XVII sind mit einer einzigen Ausnahme sämmtlich grösser als die grösste Differenz zweier Fraunhofer'schen Beobachtungen desselben Exponenten, und erheben sich bis über das Zehnfache der letzteren.

Stellt man noch übersichtlich in Einheiten der sechsten Decimale die Differenzen zusammen, welche die Formeln (29), (31), (33) liefern

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
$n = a + bl^{-2} + cl^{-6} +$	23,3	- 2,3	- 29,9	+ 4,0	- 8,8	+ 28,1	- 13,1
$n = a + bl^{-3} + cl^{-6} +$	206,7	+ 19,0	- 232,5	- 154,3	+ 16,2	+ 279,6	- 134,6
$n = a + bl^{-4} + cl^{-6} +$	395,6	+ 61,2	- 417,1	- 330,6	+ 7,1	+ 526,5	- 242,6

so lehrt ein einfacher Anblick dieser Zusammenstellung, dass die zweite und dritte dieser Formeln sich mehr und mehr von der Brauchbarkeit entfernen, so dass es nicht nöthig ist, auch noch die Formel $n = a + bl^{-5} + cl^{-6}$ zu berechnen.

Unter allen trinomischen Functionen, die in ihrem ersten Gliede die 0^{te} Potenz von l^{-1} enthalten und sich über die sechste Potenz nicht erheben, sind somit allein noch

$a + bl^{-3} + cl^{-4}$; $a + bl^{-3} + cl^{-5}$ und $a + bl^{-4} + cl^{-5}$ übrig; allein auch für diese stellt sich nicht weiter das Bedürfniss specieller Brechung heraus. Denn bringt man die nach Tafel IX gemachte allgemeinere Bemerkung in Beziehung zu den Differenzen der Tafel XVI, so erkennt man deutlich, dass neben den beiden ersten Gliedern der Formel (31) das dritte Glied eine weit höhere Potenz von l^{-1} als die sechste enthalten müsste, um die Beobachtungen wieder zu geben, dass also die Functionen

$$a + bl^{-3} + cl^{-4} \text{ und } a + bl^{-3} + cl^{-5}$$

noch weniger genügen werden als (31); und der gleiche Schluss ergibt sich für die Function $a + bl^{-4} + cl^{-5}$ aus einer Betrachtung der Differenzen in Tafel XVII.

Das Resultat unsrer bisherigen Rechnungen ist, dass unter den binomischen rationalen Functionen der Wellenlänge keine, dagegen unter den trinomischen im Bereiche der sechsten Potenz von l^{-1} zwei, aber auch nur zwei Functionen existiren, welche die Brechung des Lichtes in Flintglas No. 23. mit solcher Genauigkeit ausdrücken, welche der Präcision der Beobachtungen Fraunhofer's gleichkommt, nämlich die Functionen

$$n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$$

und

$$n = a + bl^{-2} + cl^{-6}.$$

3. Prüfung der Formeln für die Lichtbrechung in Gläsern an den übrigen von Fraunhofer benutzten Glassorten.

Nachdem im vorstehenden Paragraphen die Functionen

$$(17) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$$

und

$$(29) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-6}$$

als solche erkannt worden sind, welche die Lichtbrechung in Flintglas No. 23 mit genügender Genauigkeit wiederzugeben

geeignet sind, und zwar als die einzigen unter allen rationalen trinomischen Functionen, welche die sechste Potenz von l^{-1} nicht übersteigen, so ist die ähnliche Untersuchung nunmehr auf die übrigen Glassorten auszudehnen, von denen Fraunhofer seine Messungen über Lichtbrechung mitgetheilt hat. Selbstverständlich wird diese fernere Untersuchung nicht etwa alle dieselben Phasen zu durchschreiten haben, wie die bisherige, sondern sie wird sich zunächst sofort darauf richten müssen, ob die nämlichen Functionen (17) und (29) auch die an den übrigen Glassorten gemachten Beobachtungen auszudrücken im Stande sind oder nicht. Es geschieht nur theils aus Anhänglichkeit an die bisher gewöhnlich als richtig vorausgesetzte Function

$$(23) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$$

theils um durch ihre Analogie zu der Function (29) eine klarere Einsicht zu gewinnen, dass wir auch die Leistungen dieser Function (23) an den übrigen Glasarten prüfen.

Der Inhalt der nachfolgenden Tafeln, in denen zunächst die Formel

$$(17) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$$

an den übrigen Glasarten geprüft werden soll, bedarf keine weitere Erläuterung, nur dass überall $J = 328,4869171$.

Tafel XVIII. Flintglas No. 13.

	N	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$
<i>B</i>	1,627749	2,36762237112	7,28597082419
<i>C</i>	1,629681	2,48126094991	8,75753649706
<i>D</i>	1,635036	2,77245406999	13,51684963010
<i>E</i>	1,642024	3,11350517211	21,22559456561
<i>F</i>	1,648260	3,38785598655	29,41864090357
<i>G</i>	1,660285	3,85176148444	48,09385745067
<i>H</i>	1,671062	4,20747662473	67,15976334315
Σ	11,514097	22,18193665885	195,45821321435

$$a = \frac{1}{J} (176972,475859 - 236563,580793 + 60114,826392) \\ = \frac{1}{J} \cdot 523,721458$$

$$b = \frac{1}{J} (165591,6242846 - 122794,3284580 - 42790,3439159) \\ = \frac{1}{J} 6,9519107$$

$$c = \frac{1}{J} (1315,0747666 + 3541,2579028 - 4856,1412833) \\ = \frac{1}{J} 0,1913861$$

$$n = 1,59434495 + 0,021163432 \, l^{-1} + 0,00058262926 \, l^{-4}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,627736	1,629698	1,635047	1,642005
$\Delta = n - N =$	- 0,000013	+ 0,000017	+ 0,000011	- 0,000019

	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
n	1,648243	1,660320	1,671047
$\Delta = n - N =$	- 0,000017	+ 0,000035	- 0,000015
$\Sigma \Delta =$	- 0,000001		

Tafel XIX. Crown Glas No. 9.

	<i>N</i>	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$
<i>B</i>	1,525832	2,21938024706	6,82977991976
<i>C</i>	1,526849	2,32469471026	8,20494062519
<i>D</i>	1,529587	2,59364913283	12,64510229448
<i>E</i>	1,533005	2,90679003252	19,81636236563
<i>F</i>	1,536052	3,15722213962	27,41591872472
<i>G</i>	1,541657	3,57655164916	44,65753289093
<i>H</i>	1,546566	3,89401488012	62,15628537694
Σ	10,739548	20,67230279157	181,72592219765

$$a = \frac{1}{J} (165067,603579 - 220463,796594 + 55891,344161) \\ = \frac{1}{J} \cdot 495,151146$$

$$b = \frac{1}{J} (154321,9715035 - 114533,9998962 - 39784,0263726) \\ = \frac{1}{J} \cdot 3,9452347$$

$$c = \frac{1}{J} (1222,68167087 + 3303,03880778 - 4525,64735673) \\ = \frac{1}{J} \cdot 0,07312192$$

$$n = 1,50736946 + 0,012010325 \, l^{-1} + 0,0002226022 \, l^{-4}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,525835	1,526852	1,529575	1,533020
$\Delta = n - N = +$	0,000003	+ 0,000003	- 0,000012	+ 0,000015
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
$n =$	1,536029	1,541681	1,546556	
$\Delta = n - N = -$	0,000023	+ 0,000024	- 0,000010	
$\Sigma \Delta =$	0,000000			

Tafel XX. Flintglas No. 3.

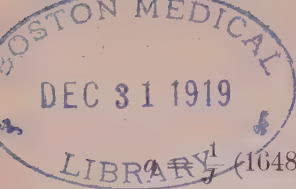
	N	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$	
B	1,602042	2,33023056913	7,17090366582	
C	1,603800	2,44185598990	8,61845786628	
D	1,608494	2,72744804203	13,29742680218	
E	1,614532	3,06137652831	20,87021970763	
F	1,620042	3,32985632616	28,91499754086	
G	1,630772	3,78329309698	47,23894759185	
H	1,640373	4,13020645155	65,92637644474	
Σ	11,320055	21,80426700406	192,03732961936	
$a = \frac{1}{J}$	(173990,036754 - 232535,849254 + 59062,704713)			
	$= \frac{1}{J}$ 516,892213			
$b = \frac{1}{J}$	(162772,2612803 - 120724,9297824 - 42041,4330202)			
	$= \frac{1}{J}$ 5,8984777			
$c = \frac{1}{J}$	(1292,05850332 + 3481,57864476 - 4773,46062155)			
	$= \frac{1}{J}$ 0,17652653			
$n =$	1,57355494 + 0,017956507 l^{-1} + 0,00053739288 l^{-4}			
	B	C	D	E
$n =$	1,602079	1,603782	1,608446	1,614550
$\Delta = n - N = +$	0,000037	- 0,000018	- 0,000048	+ 0,000018
	F	G	H	
$n =$	1,620055	1,630780	1,640364	
$\Delta = n - N = +$	0,000013	+ 0,000008	- 0,000009	
$\Sigma \Delta =$	+ 0,000001.			

Tafel XXI. Flintglas No. 30.

	N	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$
B	1,623570	2,36154385785	7,26726519324
C	1,625477	2,47486017514	8,73494515345
D	1,630585	2,74690671747	13,48005319400
E	1,637356	3,10465399688	21,16525374512
F	1,643466	3,37800233385	29,33307614771
G	1,655406	3,84044249748	47,95252633553
H	1,666072	4,19491257363	66,95921589543
Σ	11,481932	22,11932215230	194,89233566448
$a = \frac{1}{J}$	(176478,097561 — 235895,816202 + 59940,785966)		
	$= \frac{1}{J} 523,067325$		
$b = \frac{1}{J}$	(165124,1972063 — 122451,2985552 — 42666,4601733)		
	$= \frac{1}{J} 6,4384778$		
$c = \frac{1}{J}$	(1311,26745006 + 3531,36528504 — 4842,43351311)		
	$= \frac{1}{J} 0,19922199$		
$n =$	$1,59235360 + 0,019600409 l^{-1} + 0,00060648380 l^{-4}$		
	B	C	D
$n =$	1,623578	1,625455	1,630603
$\Delta = n - N =$	$+ 0,000008 - 0,000022 + 0,000018 + 0,000002$		
	F	G	H
$n =$	1,643465	1,655394	1,666079
$\Delta = n - N =$	$- 0,000001 - 0,000012 + 0,000007$		
	$\Sigma \Delta = 0,000000.$		

Tafel XXII. Crown Glas No. 13.

	N	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$
B	1,524312	2,21716934967	6,82297624447
C	1,525299	2,32233476714	8,19661127633
D	1,527982	2,59092760940	12,63183375259
E	1,531372	2,90369363811	19,79525341964
F	1,534337	3,15369710533	27,38530888820
G	1,539908	3,57249407420	44,60686920567
H	1,544684	3,88927629411	62,08064804295
Σ	10,727894	20,64959283796	181,51950082985



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{J} (164888,480785 - 220221,601874 + 55827,857523) \\
 &= \frac{1}{J} 494,736434 \\
 b &= \frac{1}{J} (154152,4381502 - 114409,7135449 - 39738,8359395) \\
 &= \frac{1}{J} 3,8886658 \\
 c &= \frac{1}{J} (1221,292834211 + 3299,454521525 - 4520,675620266) \\
 &= \frac{1}{J} 0,071735470 \\
 n &= 1,50610696 + 0,011838115 \, l^{-1} + 0,00021838151 \, l^{-4} \\
 &\quad \begin{array}{cccc} B & C & D & E \end{array} \\
 n &= \quad \quad \quad 1,524303 \quad 1,525305 \quad 1,527986 \quad 1,531377 \\
 \Delta = n - N &= -0,000009 + 0,000006 + 0,000004 + 0,000005 \\
 &\quad \begin{array}{ccc} F & G & H \end{array} \\
 n &= \quad \quad \quad 1,534337 \quad 1,539897 \quad 1,544690 \\
 \Delta = n - N &= -0,000000 - 0,000011 + 0,000006 \\
 \Sigma \Delta &= + 0,000001.
 \end{aligned}$$

Tafel XXIII. Crown Glas Lit. *M*.

	<i>N</i>	$l^{-1} N$	$l^{-4} N$
<i>B</i>	1,554774	2,26147747867	6,95932726865
<i>C</i>	1,555933	2,36897637856	8,36123145234
<i>D</i>	1,559075	2,64365055520	12,88887971705
<i>E</i>	1,563150	2,96394913215	20,20603118178
<i>F</i>	1,566741	3,22030072696	27,96366523964
<i>G</i>	1,573535	3,65050669459	45,58095024868
<i>H</i>	1,579470	3,97686208199	63,47869283582
Σ	10,952678	21,08572304812	185,43877794396

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{J} (168343,426580 - 224872,797384 + 57033,264343) \\
 &= \frac{1}{J} 503,893539 \\
 b &= \frac{1}{J} (157408,2183379 - 116806,9662629 - 40596,8567555) \\
 &= \frac{1}{J} 4,3953195
 \end{aligned}$$

$$c = \frac{1}{J} (1247,662370448 + 3368,588741640 - 4616,154655799)$$

$$= \frac{1}{J} 0,09645629$$

$$n = 1,53398358 + 0,013380501 l^{-1} + 0,00029363814 l^{-4}$$

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$n =$	1,554760	1,555934	1,559100	1,563151
$\Delta = n - N =$	- 0,000014	+ 0,000001	+ 0,000025	+ 0,000001

	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
$n =$	1,566727	1,573531	1,579475
$\Delta = n - N =$	- 0,000014	- 0,000004	+ 0,000005

$$\Sigma \Delta = 0,000000.$$

Wir stellen zunächst die Differenzen in Einheiten der sechsten Decimale zusammen, welche zwischen berechneten und beobachteten Brechungsexponenten in den vorhergehenden sechs Tafeln XVIII bis XXIII gefunden wurden.

Tafel XXIV.

Zusammenstellung der Differenzen zwischen den nach der Formel
 $n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$ berechneten und beobachteten Brechungsexponenten bei den sechs ersten Glassorten Fraunhofers, in
 Einheiten der sechsten Decimalbruchstelle.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \Delta$
Flintglas No. 13	- 13	+ 17	+ 11	- 19	- 17	+ 35	- 15	- 1
Crownglas No. 9	+ 3	+ 3	- 12	+ 15	- 23	+ 24	- 10	0
Flintglas No. 3	+ 37	- 18	- 48	+ 18	+ 13	+ 8	- 9	+ 1
Flintglas No. 30	+ 8	- 22	+ 18	+ 2	- 1	- 12	+ 7	0
Crownglas No. 13	- 9	+ 6	+ 4	+ 5	0	- 11	+ 6	+ 1
Crownglas Lit. M	- 14	+ 1	+ 25	+ 1	- 14	- 4	+ 5	0
Summen	+ 12	- 13	- 2	+ 22	- 42	+ 40	- 16	(74 - 73) = + 1

Man wird wohl einräumen, dass die Präcision der Beobachtungen Fraunhofer's bei diesen sechs Glasarten dieselbe war, wie bei Flintglas No. 23, dass also wie dort 49 Einheiten der sechsten Decimalbruchstelle die Grenze zulässiger Beobachtungsfehler sein dürfte; und in der That erreicht keine der obigen 42 Differenzen diese Grenze völlig. 21 unter ihnen liegen von 0 bis 11, und 21 von 12 bis 48, so dass man etwa 0,000012 als den wahrscheinlichen Fehler bezeichnen kann. Diese Annahme bestätigt sich in befriedigendster Weise, wenn man für kleinere Intervalle bezüglich

der Häufigkeit des Vorkommens von Beobachtungsfehlern die Forderung der Theorie mit der Wirklichkeit vergleicht. Nimmt man nämlich 0,000012 als den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler an, so müssten unter jenen 42 Differenzen sich vorfinden

		nach der Theorie	und es finden sich in Wirklichkeit
von 0	bis 0,000006	11 Fehler	11 Fehler
„ 0,000006	„ 0,000012	10 „	10 „
„ 0,000012	„ 0,000024	14 „	16 „
„ 0,000024	„ 0,000036	6 „	4 „
über 0,000036		1 „	1 „

Andrerseits darf auch angenommen werden, dass 0,000012 der wahrscheinliche Fehler in den Beobachtungen Fraunhofer's ist. Denn gesetzt, die Mittelwerthe je zweier Beobachtungen desselben Brechungsexponenten wären mit den wahren Werthen des Brechungsexponenten für die betreffende Linie identisch, so differirten in Einheiten der sechsten Decimale zwei Paare von Beobachtungen vom wahren Werthe um 0,0000005, ein Paar um 0,000001, ein Paar um 0,000003, ein Paar um 0,000012, ein Paar um 0,000016 und ein Paar um 0,0000245. Da indessen die Mittelwerthe je zweier beobachteter Brechungsexponenten derselben Linie eben nur die wahrscheinlichsten Werthe derselben, aber nicht diese selbst sind, so stellen sich gewiss die wirklich vorgekommenen Beobachtungsfehler theilweise grösser heraus als so eben angegeben, und man wird, indem man auch den geringen Einfluss in Betracht zieht, welchen fehlerhafte Bestimmungen in den Werthen der Wellenlängen äussern, und wenn man ausserdem erwägt, dass bei gleich zuverlässiger Beobachtungsart der wahrscheinliche Fehler der Doppelreihe für Flintglas No. 23, sich zu dem der einzelnen Beobachtungsreihen verhält wie $1:\sqrt{2}$, nicht erheblich fehl greifen, wenn man annimmt, dass der aus den Tafeln XVIII bis XXIV für die dort betrachteten Glassorten sich ergebende wahrscheinliche Fehler von 0,000012 auch derjenige sei, welchen jede der beiden Beobachtungsreihen über Flintglas 23 erwarten liess.

Hierdurch ist erwiesen, dass die Formel

$$(17) \quad n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$$

die Brechungsexponenten sämmtlicher sieben Glasarten so genau wiedergiebt, als es diejenige Präcision der Beobachtungen erwarten und verlangen lässt, welche durch die Vergleichung der beiden Beobachtungsreihen über Flintglas No. 23 constatirt ist.

Dem ist noch hinzuzufügen, dass auch die Gesamtheit der Differenzen, wie sie Tafel XXIV darbietet, dafür zu sprechen scheint, dass die zu Grunde liegende Formel (17) der Wahrheit entspricht, insofern als nirgends eine Regelmässigkeit im Gange der Differenzen zu Tage tritt, vielmehr innerhalb jeder Linie positive und negative Differenzen vorkommen und deshalb auch in den Summen der Differenzen gleicher Spectrallinie die Grenze 0,000049 nirgends erreicht wird.

Die Formel

$$(23) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$$

hatte sich schon für Flintglas No. 23 als unzureichend und weit weniger günstig erwiesen, als die Formel (17); dennoch verdient gerade sie, schon als die bisher üblichste, auch die Prüfung an den übrigen Glasarten. Im Folgenden sind die Ergebnisse der hierauf bezüglichen Rechnungen in kürzerer Form enthalten.

Tafel XXV.

Die allgemeine Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$ für die sechs ersten Glasarten Fraunhofer's specialisirt.

$$\text{Flintglas No. 13} \quad n = 1,60948913 + 0,0081478191 l^{-2} + 0,00024479009 l^{-4}$$

$$\text{Crown Glas No. 9} \quad n = 1,51596507 + 0,0046232399 l^{-2} + 0,000030951563 l^{-4}$$

$$\text{Flintglas No. 3} \quad n = 1,58640966 + 0,0069103446 l^{-2} + 0,00025108172 l^{-4}$$

$$\text{Flintglas No. 30} \quad n = 1,60635340 + 0,0075596806 l^{-2} + 0,00029202028 l^{-4}$$

$$\text{Crown Glas No. 13} \quad n = 1,51457462 + 0,0045595546 l^{-2} + 0,000029173985 l^{-4}$$

$$\text{Crown Glas Lit. M} \quad n = 1,54355321 + 0,0051542516 l^{-2} + 0,000079696995 l^{-4}$$

Unter Anwendung dieser Formeln erhält man zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der Brechungsexponenten die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Differenzen.

Tafel XXVI.

Differenzen zwischen den nach der Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$ berechneten und den beobachteten Brechungsexponenten in Einheiten der sechsten Decimale.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \Delta$
Flintglas No. 23	+ 74	+ 11	— 96	— 76	+ 20	+ 148	— 81	0
Crownglas No. 9	+ 53	0	— 73	— 18	— 3	+ 88	— 48	— 1
Flintglas No. 3	+ 112	— 22	— 140	— 32	+ 43	+ 103	— 64	0
Flintglas No. 30	+ 84	— 30	— 82	— 48	+ 37	+ 94	— 57	— 2
Crownglas No. 13	+ 40	+ 2	— 56	— 27	+ 21	+ 52	— 31	+ 1
Crownglas Lit. M	+ 41	— 3	— 43	— 35	+ 10	+ 68	— 38	0
Summen	+ 404	— 42	— 490	— 236	+ 128	+ 553	— 310	(1085—1087) = —

Unter den genannten sechs Glassorten ist hiernach keine einzige, bei welcher die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung die Grenze 0,000049 nicht überstiegen, ja dieselben erheben sich bis auf das Dreifache derselben. Ueberdies lehrt das Steigen und Fallen dieser Differenzen von einer Linie zur andern, welches bei allen Glasarten übereinstimmend erfolgt, das die Formel (23) das Gesetzliche der Erscheinung nicht vollständig ausdrückt. Dieses übereinstimmende Schwanken offenbart sich deutlich darin, dass in fünf Linien ausschliesslich positive oder ausschliesslich negative Differenzen vorkommen, während auch in den beiden übrigen Linien *C* und *F* ein Vorzeichen bedeutend vorherrscht. Daher gleicht sich auch die Summe der Differenzensummen, welche dem Calcul zufolge 0 ist, zwischen den grossen Zahlen + 1085 und — 1087 aus, während diess nach Tafel XXIV zwischen + 74 und — 73 geschah. An diesen Zahlen erkennt man am schlagendsten, wie viel weniger Formel (23) geeignet ist, die Brechungsexponenten wieder zu geben, als Formel (17).

Wir ziehen hieraus das kurz formulirte Resultat: die Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-4}$ ist nicht geeignet, die Brechungsexponenten in Gläsern mit hinreichender Schärfe auszudrücken.

Die einzige unter den in § 2. der Probe unterworfenen Formeln, welche für Flintglas No. 23 mit der Formel $n = a + bl^{-1} + cl^{-4}$ concurriren konnte, war

(29) $n = a + b^{-2} + cl^{-6}$

Wendet man jetzt diese auch auf die übrigen sechs Glasarten an, so erhält man die in der folgenden Tabelle enthaltenen Ergebnisse.

Tafel XXVII.

Die allgemeine Formel $n = a + bt^{-2} + ct^{-6}$ für die sechs ersten Gläser Fraunhofer's specialisirt.

$$\text{Flintglas No. 13} \quad n = 1,60837232 + 0,0090916788 t^{-2} + 0,00001966598 t^{-6}$$

$$\text{Crown Glas No. 9} \quad n = 1,51584293 + 0,0047344952 t^{-2} + 0,00000263270 t^{-6}$$

$$\text{Flintglas No. 3} \quad n = 1,58526034 + 0,0078800254 t^{-2} + 0,00002014273 t^{-6}$$

$$\text{Flintglas No. 30} \quad n = 1,60500702 + 0,0086916169 t^{-2} + 0,00002335359 t^{-6}$$

$$\text{Crown Glas No. 13} \quad n = 1,51445415 + 0,0046666340 t^{-2} + 0,00000244162 t^{-6}$$

$$\text{Crown Glas Lit. M} \quad n = 1,54319529 + 0,0054591573 t^{-2} + 0,00000644787 t^{-6}$$

Subtrahirt man von den hiernach für die Fraunhofer'schen Linien *B*, *C*, . . *H* berechneten Werthen der Brechungsexponenten die beobachteten, so ergeben sich die in folgender Tabelle zusammengestellten Differenzen.

Tafel XXVIII.

Differenzen zwischen den nach der Formel $n = a + bt^{-2} + ct^{-6}$ berechneten und den beobachteten Brechungsexponenten in Einheiten der sechsten Decimale.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	Σ
Flintglas No. 13	+ 45	+ 12	— 55	— 50	+ 5	+ 86	— 42	+ 1
Crown Glas No. 9	+ 53	+ 2	— 69	— 18	— 9	+ 78	— 38	— 1
Flintglas No. 3	+ 81	— 22	— 98	— 4	+ 28	+ 40	— 25	0
Flintglas No. 30	+ 47	— 31	— 32	— 14	+ 22	+ 21	— 14	— 1
Crown Glas No. 13	+ 38	+ 3	— 52	— 26	+ 17	+ 43	— 23	0
Crown Glas Lit. M	+ 32	— 2	— 30	— 28	+ 4	+ 47	— 23	0
Summen	+ 296	— 38	— 336	— 140	+ 67	+ 315	— 165	(678—679) = — 1

Die Tafel XXVIII lehrt, dass auch die Formel (29) den Fraunhofer'schen Beobachtungen nicht mit der Präcision genügt, welche denselben zuzusprechen ist. Die oft genannte

Grenze der Beobachtungsfehler 0,000049 wird hier unter 42 Fällen 8 mal überschritten; überdiess bemerkt man, dass das Abnehmen und Zunehmen der Differenzen von einer Spectrallinie zur andern qualitativ hier ebenso erfolgt, wie in Tafel XXVI., wenn gleich nach etwas vermindertem Massstabe. Diess wird wieder besonders deutlich an den Zahlen der letzten Horizontalreihe, welche die Summen der Differenzen für die einzelnen Spectrallinien enthält; diese letzteren steigen und fallen genau wie in Tafel XXVI., nur dass sie sich hier zwischen engeren Grenzen bewegen und im Ganzen zwischen $+ 678$ und $- 679$ ausgleichen, dort zwischen $+ 1085$ und $- 1087$; überdiess erinnert man sich aus Tafel XV., dass mit geringer Abweichung der ähnliche Gang der Differenzen auch für Flintglas No. 23 aus Formel (29) hervorging; denn er war in Einheiten der sechsten Decimale $+ 22,3 - 2,4 - 29,9 + 4,0 - 8,8 + 28,1 - 13,3$. Wir schliessen hieraus, dass auch die Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-6}$ nicht die Eigenschaft hat, die Brechungsexponenten mit genügender Genauigkeit auszudrücken.

Es ist unverkennbar, wenn man die nach Tafel IX. gemachte allgemeinere Bemerkung nochmals in Erwägung zieht, dass eine noch vollkommnere Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung sich einstellen würde, wenn man in der Formel den Exponenten des dritten Gliedes weiter erhöht. Boten die Differenzen in Tafel XV. dazu nicht zwingende Veranlassung, so thun wir diess jetzt in Folge der Betrachtung von Tafel XXVIII.; und zwar entnehmen wir einer Vergleichung der Tafeln XXVI. und XXVIII., dass das dritte Glied der Function mindestens auf die achte Potenz der Grösse l^{-1} zu bringen ist, da man sieht, wie langsam für einige Glasarten, z. B. Crown Glas No. 9 und No. 13, sich die Differenzen mit Erhöhung der letzten Potenz ändern.

Ist aber

$$(35) \quad n = a + bl^{-2} + cl^{-8}$$

so bestimmen sich die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten a , b , c durch die Gleichungen

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{J} \{ (\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-16} - (\Sigma l^{-10})^2) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-8} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-16}) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8}) \Sigma l^{-8} N \} \\ b &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-16} - (\Sigma l^{-8})^2) \Sigma l^{-2} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-8} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-16}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - 7 \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-8} N \} \\ c &= \frac{1}{J} \{ (7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2) \Sigma l^{-8} N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8}) \Sigma N \\ &\quad + (\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - 7 \Sigma l^{-10}) \Sigma l^{-2} N \} \\ J &= 7 \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-16} - 7 (\Sigma l^{-10})^2 \\ &\quad - \Sigma l^{-4} (\Sigma l^{-8})^2 - \Sigma l^{-16} (\Sigma l^{-2})^2 \\ &\quad + 2 \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} \Sigma l^{-10} \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\Sigma l^{-4} \Sigma l^{-16} - (\Sigma l^{-10})^2 = 117788941,9726$$

$$\Sigma l^{-8} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-2} \Sigma l^{-16} = -40592341,52602$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-10} - \Sigma l^{-4} \Sigma l^{-8} = 95785,11984155$$

$$7 \Sigma l^{-16} - (\Sigma l^{-8})^2 = 14791755,019466$$

$$\Sigma l^{-2} \Sigma l^{-8} - 7 \Sigma l^{-10} = -36969,31813744$$

$$7 \Sigma l^{-4} - (\Sigma l^{-2})^2 = 105,3760863133$$

$$J = 2849515323,1633 - 2024992729,3548 - 1103366941,8596 \\ - 2486141547,7302 + 2792409720,0825 = 27423824,3012$$

Hierdurch erhält man die in der folgenden Tafel aufgeführten speciellen Formeln für die sieben Glasarten Fraunhofer's.

Tafel XXIX.

Die allgemeine Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-8}$ für die sieben Gläser Fraunhofer's specialisirt.

$$\text{Flintglas No. 23} \quad n = 1,60705613 + 0,0091949794 l^{-2} \\ + 0,000002695146 l^{-8}$$

$$\text{Flintglas No. 13} \quad n = 1,60782739 + 0,0094022991 l^{-2} \\ + 0,000002239137 l^{-8}$$

$$\text{Crown Glas No. 9} \quad n = 1,51578356 + 0,0047708153 l^{-2} \\ + 0,000000314788 l^{-8}$$

$$\text{Flintglas No. 3} \quad n = 1,58469804 + 0,0081997863 l^{-2} \\ + 0,000002288838 l^{-8}$$

$$\begin{aligned}\text{Flintglas No. 30} \quad n &= 1,60434759 + 0,0090652601 \, l^{-2} \\ &\quad + 0,000002645349 \, l^{-8} \\ \text{Crown glas No. 13} \quad n &= 1,51439549 + 0,0047017257 \, l^{-2} \\ &\quad + 0,000000287939 \, l^{-8} \\ \text{Crown glas Lit. M} \quad n &= 1,54302080 + 0,0055593596 \, l^{-2} \\ &\quad + 0,000000738759 \, l^{-8}\end{aligned}$$

Hieraus folgen die in der nächsten Tafel angegebenen Differenzen Δ , welche immer wieder so gefunden sind, dass man von den nach der Formel berechneten Brechungsexponenten die beobachteten subtrahirt.

Tafel XXX.

Differenzen zwischen den nach der Formel $n = a + bl^{-2} + cl^{-8}$ berechneten und den beobachteten Brechungsexponenten in Einheiten der sechsten Decimale.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	$\Sigma \Delta$
Flintglas No. 23	− 16,2	− 10,8	+ 11,6	+ 46,1	− 7,0	− 42,4	+ 18,4	+ 0,3
Flintglas No. 13	+ 16	+ 7	− 22	− 18	+ 3	+ 26	− 12	0
Crown glas No. 9	+ 51	+ 3	− 65	− 16	− 13	+ 68	− 29	− 1
Flintglas No. 3	+ 50	− 28	− 61	+ 30	+ 27	− 21	+ 5	+ 2
Flintglas No. 30	+ 10	− 38	+ 8	+ 26	+ 23	− 48	+ 18	− 1
Crown glas No. 13	+ 37	+ 4	− 46	− 24	+ 14	+ 34	− 17	+ 2
Crown glas Lit. M	+ 23	− 3	− 19	− 18	+ 2	+ 27	− 12	0
Summen	+ 187	− 55	− 205	− 20	+ 56	+ 86	− 47	(329 − 327) = + 2

Die letzte Horizontalreihe, welche die Summen der Differenzen innerhalb der einzelnen Spectrallinien enthält, und zwar des besseren Vergleichs halber mit den Tafeln XXIV, XXVI und XXVIII unter Ausschluss von Flintglas No. 23, zeigt, dass die Formel (35) sich allerdings aufs neue besser der Erfahrung anschliesst, als die Formel (29); denn hier gleichen sich diese Summen zwischen 329 und − 327 aus, während diess dort nach Tafel XXVIII zwischen 678 und − 679 geschah. Auch bemerkt man, dass bereits bei einigen Glasarten in den Differenzen bei *G* und *H* die Umkehrung der Vorzeichen verglichen mit den Differenzen in Tafel XXVIII eingetreten ist, nämlich bei Flintglas No. 23, Flintglas No. 3 und Flintglas No. 30, und zwar bei der ersten und dritten unter diesen die Grenze der zulässigen Grösse nach dieser Seite hin fast schon erreicht ist, so dass bei einer weiteren Steigerung der Potenz des letzten Gliedes in der *G*-Linie entschieden die erlaubte Grenze der Differenzen überschritten werden würde.

Was die Differenzen in Tafel XXX im übrigen anlangt, so übertreffen im ganzen fünf darunter die von uns gesteckte Grenze der Zulässigkeit 0,000049, in Tafel XXIV that dies keine. Unter den 42 Differenzen der letzten sechs Glasarten liegen 21 zwischen 0 und 21, die übrigen 21 zwischen 22 und 68; in Tafel XXIV war diese mittlere Grösse 12. Die Differenzensummen gleichen sich in Tafel XXX zwischen 329 und — 327 aus, in Tafel XXIV zwischen + 74 und — 73. Aus diesen drei Punkten muss man schliessen, dass die Formel

$$(35) \quad n = a + bt^{-2} + ct^{-8}$$

ziemlich weit hinter der Formel

$$(17) \quad n = a + bt^{-1} + ct^{-4}$$

zurücksteht hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit, die Brechungsexponenten der Lichtstrahlen von verschiedener Wellenlänge in allen von Fraunhofer untersuchten Glasarten mit der, den Beobachtungen eignen Präcision auszudrücken. Wir schliessen also: Unter allen binomischen und trinomischen Functionen ist $n = a + bt^{-1} + ct^{-4}$ die einzige, welche die Beobachtungen Fraunhofer's über die Lichtbrechung in Gläsern vollständig genügend ausdrückt; jedoch kann man allerdings einräumen, dass auch Formel $n = a + bt^{-2} + ct^{-8}$ sehr nahe befriedigt.

Und hier sind wir an dem Punkte angekommen, wo die Schranke der von uns gebrauchten rein empirischen Methode hervortritt. Wir sind nämlich wohl im Stande, eine Formel zu finden, welche mit der den Beobachtungen eignen Genauigkeit die einzelnen Werthe wiedergiebt; aber auf absolute Wahrheit kann dieselbe deshalb noch nicht Anspruch machen, schon deshalb nicht, weil absolut wahr doch nur eine sein dürfte, aber durch Induction möglicher Weise mehrere gefunden werden. Nimmt man hinzu, dass es eine Willkührlichkeit von uns war, die Form der Function auf drei Glieder zu beschränken, was vor einer mehr als dreigliedrigen Function lediglich den Vorzug leichterer praktischer Anwendbarkeit bedingt, nicht aber der Natur der Sache entlehnt ist, nimmt man ferner hinzu, dass hier nur

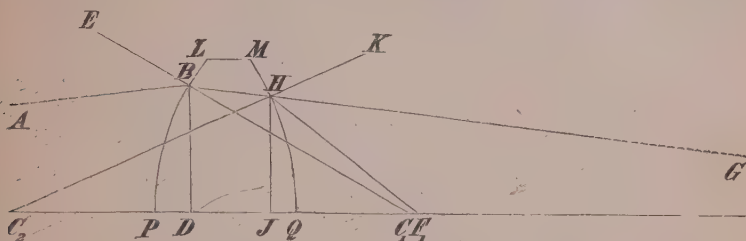
die Beobachtungen Fraunhofer's an sieben Glasarten zu Grunde gelegt sind, dass aber nicht erwiesen ist, ob die Formel (17) auch die an andern Gläsern gemachten Beobachtungen befriedigen würde, so sinkt der aprioristische Werth dieser Formel noch weiter. Nichts desto weniger behauptet sie unter allen dreigliedrigen Functionen, welche die Potenzen von l^{-1} bis zur achten umfassen, das Uebergewicht so augenscheinlich, dass der Gedanke nicht völlig ungerechtfertigt ist, es möchte vielleicht gelingen, auch aus allgemeinen mechanischen Gründen ihre Gültigkeit zu erweisen. Was sie von den bisher aus mechanischen Principien deducirten Formeln wesentlich unterscheidet, ist, dass in ihr eine ungerade Potenz von l^{-1} vorkommt. Jedenfalls drückt aber die Formel (17) so vollkommen die Brechung des Lichts in jenen 7 Glasarten aus, dass man sich ihrer mit grösster Zuverlässigkeit zur Aufstellung der nöthigen Berechnungen bei optischen Anwendungen jener Gläser bedienen kann.

Indem wir jene rein wissenschaftliche Hoffnung vorläufig dahingestellt sein lassen, wenden wir uns zu einem Beispiel der praktischen Anwendung der Formel und stellen uns die Aufgabe, aus einigen der genannten sieben Glasarten eine vollkommen achromatische und aplanatische Linse darzustellen.

4. Gang eines Lichtstrahls durch ein System mehrerer nahe hintereinander liegender Linsengläser.

$PLMQ$ sei eine Hälfte eines durch die Axe geführten Querschnittes einer sphärischen centrirten Glaslinse, für welche die Halbmesser der beiden, die Vorder- und Hinterfläche begrenzenden Kugelmittelpunkte gleich sind; L und M liegen auf den Umfängen jener beiden Kugelmittelpunkte, P und Q seien die Pole der letzteren und liegen der Voraussetzung nach auf der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte C_1 und C_2 , so dass die gerade Linie C_2PQC_1 die Axe der Linse ist; PL sei die vordere, dem leuchtenden Punkte zugewendete, QM die Rückseite der Linse. Es sei der Halbmesser der Vorderfläche $PC_1 = a_1$, derjenige der Hinterfläche $QC_2 = a_2$, beide ihrem Vorzeichen nach positiv, wenn die Linse eine biconvexe ist. Die Oeffnung der Vorderfläche PC_1L sei o_1 ,

die der Rückfläche $QC_2M = o_2$, also $a_1 \sin o_1 = a_2 \sin o_2$. Zwischen den beiden die Linse begrenzenden Kugelflächen befinde sich ein cylindrisch gestalteter Theil des Glaskörpers, von der Längenausdehnung $LM = d'$, welche nicht grösser



sei, als der Halbmesser der Oeffnung der Linse. Der Brechungsexponent des Glases sei n_1 . A sei ein Punkt der Axe, dessen Abstand AP von der Linse $= b$ sei; von ihm falle ein Lichtstrahl AB auf den Punkt B der Vorderfläche, dessen Abstand BD von der Axe $= y$ sei. Dann ist, indem man keine höhere Potenz von $\frac{y}{a}$, als die zweite, gegen die Einheit, also auch keine höhere als die dritte Potenz dieses Quotienten neben der ersten noch in Rechnung bringt

$$\begin{aligned} \sin BAD &= y : \sqrt{(b + a_1 - \sqrt{a_1^2 - y^2})^2 + y^2} \\ &= y : \left(b^2 + \frac{b}{a_1} y^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y^2}{2a_1b} - \frac{y^2}{2b^2}\right) \\ \cos BAD &= 1 - \frac{y^2}{2b^2} \end{aligned}$$

Ist ferner BE die Verlängerung von C_1B über B , so ist $ABE = BC_1A + BAC_1 = i_1$ der Einfallswinkel des Strahles an der Vorderfläche, daher

$$\begin{aligned} \sin i_1 &= \frac{y}{a_1} \left(1 - \frac{y^2}{2b^2}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{2a_1^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2a_1b} - \frac{y^2}{2b^2}\right) \frac{y}{b} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right) y - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right)^2 \frac{y^3}{2b} \end{aligned}$$

Der Strahl werde in B so gebrochen, dass er die Hinterseite der Linse im Punkte H schneide, dessen senkrechter Abstand von der Axe HJ sei, dass er aber in seiner Verlängerung die Axe in G schneiden würde. Dann ist $C_1BG = r_1$ der Brechungswinkel, daher

$$\sin r_1 = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right) \frac{y}{n_1} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right)^2 \frac{y^3}{2 n_1 b}$$

$$\cos r_1 = 1 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b}\right)^2 \frac{y^2}{2 n_1^2}$$

Hieraus ergibt sich, indem man vorläufig von den von y abhängigen Gliedern absieht

$$DG = g = \frac{n_1 a_1 b}{(n_1 - 1) b - a_1}$$

Indem wir nun d' als gleicher Ordnung mit $\frac{y^2}{a}$ und mit $a \sin^2 o$ betrachten und bedenken, dass in dem Abstände des Punktes B von der Axe die Dicke der Linse ist

$$DJ = d' = \frac{a_1 + a_2}{2 a_2} \left(a_1 \sin^2 o_1 - \frac{y^2}{a_1}\right) + d''$$

so schliesst man aus der Proportion

$$BD : HJ = g : (g - d'')$$

$$HJ = y \left(1 - \frac{d''}{g}\right)$$

$$= y - y \left[\frac{a_1 + a_2}{2 a_2} \left(a_1 \sin^2 o_1 - \frac{y^2}{a_1}\right) + d'' \right] \left[\frac{n_1 - 1}{n_1 a_1} - \frac{1}{n_1 b} \right]$$

$$= y \left\{ 1 + \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_1^2 a_2} y^2 - \frac{a_1 + a_2}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{y^2}{b} - \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2} \sin^2 o_1 \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2 b} \sin^2 o_1 - \frac{n_1 - 1}{n_1 a_1} d' + \frac{1}{n_1 b} d' \right\}$$

Es sei ferner $BHC_2 = r_2$, dann ist $r_1 + r_2 = BC_1 C_2 + HC_2 C_1$
daher $r_2 = BC_1 C_2 + HC_2 C_1 - r_1$, also

$$\sin r_2 = \left[\frac{y}{a_1} - \frac{y^3}{2 a_1 a_2^2} + \left(\frac{y}{a_2} - \frac{y^3}{2 a_1 a_2^2} \right) \left\{ 1 + \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_1^2 a_2} y^2 \right. \right.$$

$$\left. - \frac{a_1 + a_2}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{y^2}{b} - \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2} \sin^2 o_1 \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2 b} \sin^2 o_1 - \frac{n_1 - 1}{n_1 a_1} d' + \frac{1}{n_1 b} d' \right\} \left[1 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} \right)^2 \frac{y^2}{2 n_1} \right.$$

$$\left. - \left[1 - \frac{y^2}{2 a_1^2} - \frac{y^2}{2 a_2^2} - \frac{y^2}{a_1 a_2} \right] \left[\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} \right) \frac{y}{n_1} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} \right)^2 \frac{y^3}{2 n_1 b} \right] \right]$$

$$= \left(\frac{n_1 a_1 + (n_1 - 1) a_2}{n_1 a_1 a_2} - \frac{1}{n_1 b} \right) y + \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1^2 a_1^3 a_2} y^3$$

$$+ \frac{(n_1 - 2) a_1 + (2 n_1 - 2) a_2}{2 n_1^2 a_1^2 a_2} \frac{y^3}{b} + \frac{-a_1 + (2 n_1 - 1) a_2}{2 n_1^2 a_1 a_2} \frac{y^3}{b^2}$$

$$+ \frac{1}{2 n_1} \frac{y^3}{b^3} - \frac{(n_1 - 1) (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2^2} y \sin^2 o_1 + \frac{a_1 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2^2 b} y \sin^2 o_1$$

$$- \frac{n_1 - 1}{n_1 a_1 a_2} y d' + \frac{1}{n_1 a_2 b} y d'$$

Es sei ferner HK die Verlängerung des Halbmessers C_2H , und HF_1 der aus der Linse ausfahrende Strahl, welcher in F_1 die Axe schneidet, so ist $\sin F_1HK = \sin i_2 = n_1 \sin r_2$, also

$$\begin{aligned}\sin i_2 &= \left(\frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a_2} \right) y + \frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{2 n_1 a_1^3 a_2} y^3 \\ &+ \frac{(n_1-2)a_1 + (2n_1-2)a_2}{2 n_1 a_1^2 a_2} \frac{y^3}{b} + \frac{-a_1 + (2n_1-1)a_2}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{y^3}{b^2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{y^3}{b^3} - \frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{2 a_2^2} y \sin^2 o_1 \\ &+ \frac{a_1(a_1+a_2)}{2 a_2^3 b} y \sin^2 o_1 - \frac{n_1-1}{a_1 a_2} y d' + \frac{1}{a_2 b} y d' \\ \cos i_2 &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a_2} \right)^2 y^2\end{aligned}$$

und $HF_1C_2 = i_2 - HC_2F_1$, daher

$$\begin{aligned}\sin HF_1C_2 &= \left(\frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b} \right) y \\ &+ \frac{(n_1-1)(a_1+a_2) \{ n_1^2 a_1^2 + (n_1^2 - n_1 - 1) a_1 a_2 + a_2^2 \}}{2 n_1 a_1^3 a_2^3} y^3 \\ &+ \frac{(n_1-1)(a_1+a_2) \{ -(2n_1+1)a_1 + 2a_2 \}}{2 n_1 a_1^2 a_2^2} \frac{y^3}{b} \\ &+ \frac{(n_1-1)a_1 + (2n_1-1)a_2}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{y^3}{b^2} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{b^3} \\ &- \frac{(n_1-1)^2 (a_1+a_2)}{2 n_1 a_2^2} y \sin^2 o_1 \\ &+ \frac{(n_1-1)(a_1+a_2)a_1}{2 n_1 a_2^2 b} y \sin^2 o_1 \\ &- \frac{(n_1-1)^2}{n_1 a_1 a_2} y d' + \frac{n_1-1}{n_1 a_2 b} y d'\end{aligned}$$

Nun ist $C_2F_1 = \frac{a_2 \sin i_2}{\sin HF_1C_2}$, also, indem wir die Bezeichnung einführen

$$\begin{aligned}&\frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\varphi_1} \\ C_2F_1 &= \left[a_2 \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{a_2} \right) y + \frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{2 n_1 a_1^3} y^3 \right. \\ &+ \frac{(n_1-2)a_1 + (2n_1-2)a_2}{2 n_1 a_1^2} \frac{y^3}{b} + \frac{-a_1 + (2n_1-1)a_2}{2 n_1 a_1} \frac{y^3}{b^2} \\ &+ \frac{a_2}{2} \frac{y^3}{b^3} - \frac{(n_1-1)(a_1+a_2)}{2 a_2} y \sin^2 o_1 \\ &\left. + \frac{a_1(a_1+a_2)}{2 a_2 b} y \sin^2 o_1 - \frac{n_1-1}{a_1} y d' + \frac{1}{b} y d' \right] \times\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi_1 \left[1 - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{n_1^2 a_1^2 + (n_1^2 - n_1 - 1)a_1 a_2 + a_2^2\}}{2 n_1 a_1^3 a_2^3} \varphi_1 y^2 \right. \\
 & \quad - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{-(2 n_1 + 1)a_1 + 2 a_2\}}{2 n_1 a_1^2 a_2^2} \frac{\varphi_1 y^2}{b} \\
 & \quad - \frac{(n_1 - 1)a_1 + (2 n_1 - 1)a_2}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{\varphi_1 y^2}{b^2} \\
 & \quad - \frac{\varphi_1}{2} \frac{y^2}{b^3} + \frac{(n_1 - 1)^2 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2^2} \varphi_1 \sin^2 o_1 \\
 & \quad - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)a_1}{2 n_1 a_2^2 b} \varphi_1 \sin^2 o_1 \\
 & \quad \left. + \frac{(n_1 - 1)^2}{n_1 a_1 a_2} \varphi_1 d' - \frac{n_1 - 1}{n_1 a_2 b} \varphi_1 d' \right] \\
 & = \varphi_1 + a_2 - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{n_1^2 a_1 + (n_1^2 - n_1 - 1)a_2\}}{2 n_1 a_1^2 a_2^2} \varphi_1 y^2 \\
 & \quad - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{n_1^2 a_1^2 + (n_1^2 - n_1 - 1)a_1 a_2 + a_2^2\}}{2 n_1 a_1^3 a_2^3} \varphi_1^2 y^2 \\
 & \quad + \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)(2 n_1 + 1) - n_1 a_2}{2 n_1 a_1 a_2 b} \varphi_1 y^2 \\
 & \quad - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{-(2 n_1 + 1)a_1 + 2 a_2\}}{2 n_1 a_1^2 a_2^2 b} \varphi_1^2 y^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2 b^2} \varphi_1 y^2 - \frac{(n_1 - 1)a_1 + (2 n_1 - 1)a_2}{2 n_1 a_1 a_2 b^2} \varphi_1^2 y^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2 b^3} \varphi_1^2 y^2 - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2} \varphi_1 \sin^2 o_1 \\
 & \quad + \frac{(n_1 - 1)^2 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2^2} \varphi_1^2 \sin^2 o_1 \\
 & \quad + \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2 b} \varphi_1 \sin^2 o_1 - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)a_1}{2 n_1 a_2^2 b} \varphi_1^2 \sin^2 o_1 \\
 & \quad - \frac{n_1 - 1}{n_1 a_1} \varphi_1 d' + \frac{(n_1 - 1)^2}{n_1 a_1 a_2} \varphi_1^2 d' \\
 & \quad + \frac{1}{n_1 b} \varphi_1 d' - \frac{n_1 - 1}{n_1 a_2 b} \varphi_1^2 d'
 \end{aligned}$$

Ein Theil der auf die beiden ersten Glieder folgenden Glieder dieses Ausdruckes hat φ_1 , die übrigen haben φ_1^2 zum gemeinschaftlichen Factor; hebt man für alle den Factor φ_1^2 aus, multiplicirt also jene ersteren innerhalb der Klammern mit $\frac{1}{\varphi_1} = \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b}$, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$C_2 F_1 = \varphi_1 + a_2$$

$$\begin{aligned} & - \varphi_1^2 \left[\frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{n_1^3 a_1^2 + (2n_1^3 - 2n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2n_1^2 + 2) a_2^2\}}{2 n_1 a_1^3 a_2^3} y^2 \right. \\ & - \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) \{ (3n_1^2 + n_1) a_1 + (3n_1^2 - 3n_1 - 4) a_2 \}}{2 n_1 a_1^2 a_2^2} \frac{y^2}{b} \\ & \left. + \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)(3n_1 + 2)}{2 n_1 a_1 a_2} \frac{y^2}{b^2} \right] \\ & + \varphi_1^2 \sin^2 o_1 \left[- \frac{(n_1 - 1)^2 (a_1 + a_2)}{2 n_1 a_1 a_2} + \frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}{n_1 a_2 b} - \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2 n_1 a_2 b^2} \right] \\ & + \varphi_1^2 d' \left[- \frac{(n_1 - 1)^2}{n_1 a_1^2} + \frac{2(n_1 - 1)}{n_1 a_1 b} - \frac{1}{n_1 b^2} \right] \end{aligned}$$

Hieraus folgt, indem man noch einführt

$$\frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} = \frac{1}{f_1}$$

$Q F_1 = C_2 F_1 - a_2$, das ist

$$\begin{aligned} Q F_1 = \varphi_1 & - \frac{\varphi_1^2}{2 f_1} \left[\frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ & - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \left. \right] y^2 \\ & - \frac{\varphi_1^2 \{ (n_1 - 1) b - a_1 \}^2}{n_1 a_1^2 b^2} \left[\frac{a_1(a_1 + a_2)}{2 a_2} \sin^2 o_1 + d' \right] \end{aligned}$$

oder endlich, indem man die Dicke der Linse an der Axe

$$PQ = \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2 a_2} \sin^2 o_1 + d' = d_1$$

setzt

$$\begin{aligned} (1) \quad Q F_1 = \varphi_1 & - \frac{\varphi_1^2 y^2}{2 f_1} \left[\frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ & - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \left. \right] \\ & - \frac{\varphi_1^2 \{ (n_1 - 1) b - a_1 \}^2}{n_1 a_1^2 b^2} d_1 \end{aligned}$$

wo φ_1 die Brennweite der Centralstrahlen für einen solchen leuchtenden Punkt bedeutet, der im Abstand b vor der Linse sich befindet, f_1 aber die Hauptbrennweite der Centralstrahlen, d. h. die Brennweite der Centralstrahlen für einen in unendlicher Entfernung von der Linse befindlichen leuchten-

den Punkt, und zwar für beide Grössen die Dicke der Linse unendlich klein gedacht.

In dieser Entwicklung sind keine andern Glieder vernachlässigt, als diejenigen, welche mit den vierten und höheren Potenzen von $\frac{y}{a}$ behaftet sind gegenüber solchen, welche $\frac{y}{a}$ gar nicht oder in der zweiten Potenz enthalten, ausserdem diejenigen, welche $\frac{y}{a} \sin^4 \alpha_1$ oder höhere Potenzen davon, und endlich solche, welche höhere Potenzen von $\frac{y d'}{a^2}$ enthalten; insbesondere haben also nicht etwa die höheren Potenzen von $\frac{1}{b}$ die Veranlassung zum Verschwinden von Gliedern abgegeben, die Formel ist also ohne Bedenken auch für kleine, mit a vergleichbare Werthe von b anzuwenden, was nachher geschehen soll.

Die Wichtigkeit der Gleichung (1) veranlasst uns, sie mit den von andern auf andern Wegen gefundenen Resultaten zu vergleichen. Klügel findet § 178 seines Werkes „Analytische Dioptrik“, Leipzig 1778, die sphärische Abweichung nach dem Durchgange durch eine Linse

$$- \frac{n \alpha^2 x^2}{2(n-1)^2 p} \left\{ n \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{2n+1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right) + \frac{n+2}{k^2} \right\}$$

wo n den Brechungsexponenten des Glases, a den Abstand des leuchtenden Punktes von der Linse, α die zugehörige Brennweite, wie sie sich ohne sphärische Aberration ergibt, p die zu einem unendlich entfernten Object gehörende Brennweite ohne die sphärische Aberration, x den Abstand des Punktes der Linsenfläche von der Achse, in welchem der noch ungebrochne Strahl auffällt, endlich k die Entfernung desjenigen Punktes der Axe von der Linse bedeutet, durch welchen die Verlängerung des nur an der Vorderseite der Linse gebrochenen Strahles gehen würde, wenn von der sphärischen Aberration abgesehen wird, also nach Klügel a. a. O. § 4 und in Klügel's Bezeichnung $k = \frac{n \alpha f}{(n-1) \alpha - f}$, wo wieder f der Halbmesser der Vorderfläche der als convex gedachten Linse ist. Uebertragen wir diess alles in unsre Bezeichnungsweise, so tritt an die Stelle von

Klügel's n bei uns n_1

„ α „ „ b

„ α „ „ φ_1

„ $\frac{1}{\alpha}$ „ „ $\frac{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} - \frac{1}{b}$

„ p „ „ f_1

„ k „ „ $\frac{n_1 b a_1}{(n_1 - 1) b - a_1}$

Setzt man diess in obige Formel für die sphärische Aberration ein, und ordnet auf die von uns gewählte Weise, so erhält man dieselbe

$$-\frac{\varphi_1^2 y^2}{2 f_1} \left\{ \frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ \left. - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \right\}$$

also genau übereinstimmend mit unserem Ausdruck, mit Ausnahme dass bei Klügel das von der Dicke der Linse abhängige Glied fehlt. Bezüglich der aus der Dicke der Linse hervorgehenden Aberration begnügt sich Klügel § 176 zu sagen, es habe jene keinen Einfluss auf die Abweichung, wenn sie gegen k und α sehr klein sei; „wäre die Dicke des Glases aber gegen k und α beträchtlich, so könnte von derselben allerdings eine beträchtliche Veränderung der Abweichung entstehen.“

Herschel findet p. 240 seiner Abhandlung „On the aberrations of compound lenses and object-glasses“, Phil. Trans. für 1821, I p. 222 ff., es sei nach dem Durchgange durch eine Linse

$$\Delta f = \frac{y^2}{2} \mu^2 L (A + BD + CD^2),$$

wo f der reciproke Werth der Brennweite centraler Strahlen, so dass also die sphärische Aberration $= -\frac{\Delta f}{f^2}$, oder in unsrer Bezeichnungsweise, wenn nur Δf die Herschel'sche Bedeutung behält, $= -\varphi_1^2 \Delta f$, wo ferner

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{\sin \text{Einfallswinkel}}{\sin \text{Brechungswinkel}}$$

$$L = (\mu - 1) (r_1 - r_2), \quad A = \alpha r_1^2 + \alpha' r_1 r_2 + \alpha' r_2^2, \quad B = \beta r_1 + \beta' r_2, \quad C = \gamma \\ \alpha = 2m^3 - 2m + 1, \quad \alpha' = m^2 + 2m - 2, \quad \alpha' = 1 \\ \beta = 4m^3 + 3m^2 - 3m, \quad \beta' = m^2 + 3m \\ \gamma = 2m^3 + 3m^2$$

wo ferner D der reciproke Werth des Abstandes des leuchtenden Punktes von der vorderen Linsenfläche, r_1 und r_2 aber die reciproken Werthe der Halbmesser der Linsenflächen sind, diese letzteren beide positiv gerechnet nach der vom Objecte abgewendeten Seite, so dass für zwei positive Werthe von r_1 und r_2 die Linse eine convex-concave sein würde. In unsre Bezeichnung übersetzt, ist also die sphärische Aberration

$$\begin{aligned}
 & - \varphi_1^2 \cdot \frac{y^2 n_1^2 (n_1 - 1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)}{2} \left\{ \left(\frac{2}{n_1^3} - \frac{2}{n_1} + 1 \right) \frac{1}{a_1^2} - \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{2}{n_1} - 2 \right) \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2^2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{4}{n_1^3} + \frac{3}{n_1^2} - \frac{3}{n_1} \right) \frac{1}{a_1 b} - \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{3}{n_1} \right) \frac{1}{a_2 b} + \left(\frac{2}{n_1^3} + \frac{3}{n_1^2} \right) \frac{1}{b^2} \right\} \\
 & = - \frac{y^2 \varphi_1^2}{2 f_1} \left\{ \frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - 2 n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_2 + 2}{n_1 b^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Man sieht, dass auch dieser von Herschel für die Aberration gefundene Ausdruck mit dem unsrigen identisch ist, mit Ausnahme des Umstandes, dass bei uns noch das von der Dicke der Linse abhängige Glied hinzutritt. Man vergleiche auch den von Santini, *Teorica degli stromenti ottici* I p. 119 gegebenen Ausdruck für die sphärische Längenabweichung, welcher mit dem Herschel'schen identisch ist.

Was jenes von der Dicke der Linse abhängige Glied anlangt, so kann man allerdings den dadurch bedingten Abstand des Punktes F_1 , in welchem der gebrochne Strahl die Axe wirklich schneidet, von dem idealen Brennpunkte, dessen Abstand von der Linse φ_1 ist, nicht zur sphärischen Aberration rechnen, da y in diesem Gliede nicht vorkommt; das heisst also, dieser Theil der Abweichung ist den centralen Strahlen ebenso wie den Randstrahlen eigenthümlich; er verursacht also zwar einen merklichen Unterschied zwischen der wirklichen und der idealen Brennweite, nicht aber ein Auseinanderliegen der Kreuzungspunkte der gebrochenen Strahlen mit der Axe, insofern sie in verschiedenen Abständen von der Axe auf der Vorderfläche aufgefallen wären. Dennoch ist dieses Glied von erheblicher Bedeutung, weil es von n_1 abhängt, weil mithin für Strahlen von verschiedener Wellenlänge der Werth dieses Gliedes verschieden ist.

Es befinde sich nun hinter der ersten Linse eine zweite, deren Axe mit der der ersteren zusammenfällt, so dass auf der Axe zwischen beiden der Abstand $Q P_2 = c_1$ sei, eine Grösse, deren Verhältniss zu a mit $\frac{d_1}{a}$ und $\frac{y^2}{a^2}$ von einerlei Ordnung sei. Die Krümmungshalbmesser der Vorder- und Hinterfläche seien a_3 und a_4 , welche wieder als positiv in die Rechnung eingehen sollen, wenn die Linse eine biconvexe ist. Die Dicke der zweiten Linse an der Axe sei $P_2 Q_2 = d_2$, der Brechungs-exponent ihrer Substanz n_2 ; diese zweite Linse wird von dem Strahle nach dem Durchgang durch die erste Linse im Punkte N getroffen, dessen senkrechter Abstand NO von Axe $= y'$ ist. Man findet den Abstand $Q_2 F_2$ hinter der zweiten Linse, in welchem der gebrochene Strahl nach dem Austritt aus der zweiten Linse die Axe schneidet, indem man Gleichung (1) so anwendet, dass

an die Stelle von	$Q F_1$	tritt $Q_2 F_2$
„ „ „ „	a_1, a_2, n_1	„ a_3, a_4, n_2
„ „ „ „	b	„ $- Q F_1 + c_1$
„ „ „ „	d_1	„ d_2
„ „ „ „	y	„ y'
nach „ „ „ „	f_1	„ $\frac{a_3 a_4}{(n_2 - 1)(a_3 + a_4)} = f_2$
„ „ „ „	φ_1	„ $\frac{a_3 a_4 (-Q F_1 + c_1)}{(n_2 - 1)(a_3 + a_4)(-Q F_1 + c_1) - a_3 a_4}$

Bezeichnet man nun vorübergehend den Coefficienten von y^2 in (1) mit $-k$, denjenigen von d_1 mit $-l$, so geht bei Anwendung von Gleichung (1) auf den Durchgang des Strahles durch die zweite Linse das erste Glied φ_1 über in

$$\frac{a_3 a_4 \left(\frac{-a_1 a_2 b}{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)b - a_1 a_2} + k y^2 + l d_1 + c_1 \right)}{(n_2 - 1)(a_3 + a_4) \left(\frac{-a_1 a_2 b}{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)b - a_1 a_2} + k y^2 + l d_1 + c_1 \right) - a_3 a_4} =$$

$$= [a_1 a_2 a_3 a_4 b - a_3 a_4 \{ (n_1 - 1)(a_1 + a_2)b - a_1 a_2 \} (k y^2 + l d_1 + c_1)] :$$

$$[(n_1 - 1)(a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1)(a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4$$

$$- (n_2 - 1)(a_3 + a_4) \{ (n_1 - 1)(a_1 + a_2)b - a_1 a_2 \} (k y^2 + l d_1 + c_1)]$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b}{(n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4} \\ - \frac{a_3^2 a_4^2 \{ (n_1 - 1) (a_1 + a_2) b - a_1 a_2 \}^2 (k y^2 + l d_1 + c_1)}{\{ (n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4 \}^2}$$

also, indem man

$$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b}{(n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4} = \varphi_2$$

setzt und

$$\frac{a_1 a_2 b}{(n_1 - 1) (a_1 + a_2) b - a_1 a_2} = \varphi_1$$

beibehält, so geht das erste Glied φ_1 der Gleichung (1) bei Anwendung der letzteren auf den Gang des Lichts durch die zweite Linse über in

$$\varphi_2 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} (k y^2 + l d_1 + c_1) = \\ \varphi_2 - \frac{\varphi_2^2 y^2}{2 f_1} \left\{ \frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ \left. - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \right\} \\ - \frac{\varphi_2^2 \{ (n_1 - 1) b - a_1 \}^2}{n_1 a_1^2 b^2} d_1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} c_1$$

Was das zweite Glied der rechten Seite in Gleichung (1) anlangt, so hat in ihm an die Stelle von y^2 jetzt y'^2 zu treten; allein da letztere Grösse von der ersteren nur um kleine Grössen höherer Ordnung verschieden ist, so kommen diese in Wegfall und es bleibt einfach y^2 Factor dieses Gliedes. Von der zusammengesetzten Grösse, welche streng genommen für φ_1 einzusetzen ist, und welche wir soeben entwickelt haben, kommt hier nur das erste Glied φ_2 in Betracht, da der damit verbundene Factor y^2 die übrigen kleinen Grössen von der Ordnung $\frac{y^2}{a^2}$ nicht zur Geltung kommen lässt. An die Stelle von b ferner wäre streng genommen die Grösse $- Q F_1 + c_1$ einzuführen, allein aus dem soeben angeführten Grunde, und weil auch $\frac{c_1}{a}$ mit $\frac{y^2}{a^2}$ von gleicher Ordnung sein soll, ist hiervon nur $-\varphi_1$ zu behalten. Die übrigen Vertauschungen der Grössen sind oben genannt.

Bezüglich des dritten Gliedes der rechten Seite von Gleichung (1) gelten die analogen Rücksichten. Somit wird der vollständige Ausdruck für den Abstand desjenigen Punktes von der letzten Linsenfläche, in welchem der gebrochene Strahl nach dem Durchgange durch zwei Linsen die Axe schneidet,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} Q_2 F_2 = \varphi_2 - \frac{\varphi_2^2 y^2}{2 f_1} & \left\{ \frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ & \left. - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \right\} \\ & - \frac{\varphi_2^2 y^2}{2 f_2} \left\{ \frac{n_2^3 a_3^2 + (3 n_2^3 - 2 n_2^2 - n_2) a_3 a_4 + (n_2^3 - 2 n_2^2 + 2) a_4^2}{n_2 a_3^2 a_4^2} \right. \\ & \left. + \frac{(3 n_2^2 + n_2) a_3 + (3 n_2^2 - 3 n_2 - 4) a_4}{n_2 a_3 a_4 \varphi_1} + \frac{3 n_2 + 2}{n_2 \varphi_1^2} \right\} \\ & - \frac{\varphi_2^2 \{ (n_1 - 1) b - a_1 \}^2 d_1}{n_1 a_1^2 b^2} - \frac{\varphi_2^2 \{ (n_2 - 1) \varphi_1 + a_3 \}^2 d_2}{n_2 a_3^2 \varphi_1^2} - \frac{\varphi_2^2 c_1}{\varphi_1^2} \end{aligned} \right.$$

Es befinde sich ferner hinter der zweiten Linse eine dritte Linse, deren Axe mit denen der beiden ersten zusammenfällt, in dem kleinen Abstand $Q_2 P_3 = c_2$; ihre Krümmungshalbmesser seien a_5, a_6 , ihre Dicke an der Axe $P_3 Q_3 = d_3$, der Brechungsexponent ihrer Substanz n_3 . Um den Abstand des Schnidungspunktes F_3 des durch alle drei Linsen gebrochenen Strahls mit der Axe von der Rückseite der dritten Linse zu finden, hat man wieder Gleichung (1) auf die dritte Linse anzuwenden, so nämlich, dass

an Stelle von	$Q F_1$	tritt	$Q_3 F_3$
„ „ „	a_1, a_2, n_1, d_1	„	a_5, a_6, n_3, d_3
„ „ „	b	„	$- Q_2 F_2 + c_2$
somit „ „ „	f_1	„	$\frac{a_5 a_6}{(n_3 - 1) (a_5 + a_6)} = f_3$
„ „ „	φ_1	„	$\frac{a_5 a_6 (- Q_2 F_2 + c_2)}{(n_3 - 1) (a_5 + a_6) (- Q_2 F_2 + c_2) - a_5 a_6}$

Hierdurch wird ganz nach denselben Betrachtungen, welche in Bezug auf die zweite Linse angestellt wurden, wenn man setzt

$$\begin{aligned} \varphi_3 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b : [& (n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 a_5 a_6 b \\ & + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 a_5 a_6 b \\ & + (n_3 - 1) (a_5 + a_6) a_1 a_2 a_3 a_4 b - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6] \end{aligned}$$

$$(3) \left\{ \begin{aligned} Q_3 F_3 = \varphi_3 - \frac{\varphi_3^2 y^2}{2 f_1} & \left\{ \frac{n_1^3 a_1^2 + (2 n_1^3 - 2 n_1^2 - n_1) a_1 a_2 + (n_1^3 - 2 n_1^2 + 2) a_2^2}{n_1 a_1^2 a_2^2} \right. \\ & \left. - \frac{(3 n_1^2 + n_1) a_1 + (3 n_1^2 - 3 n_1 - 4) a_2}{n_1 a_1 a_2 b} + \frac{3 n_1 + 2}{n_1 b^2} \right\} \\ - \frac{\varphi_3^2 y^2}{2 f_2} & \left\{ \frac{n_2^3 a_3^2 + (2 n_2^3 - 2 n_2^2 - n_2) a_3 a_4 + (n_2^3 - 2 n_2^2 + 2) a_4^2}{n_2 a_3^2 a_4^2} \right. \\ & \left. + \frac{(3 n_2^2 + n_2) a_3 + (3 n_2^2 - 3 n_2 - 4) a_4}{n_2 a_3 a_4 \varphi_1} + \frac{3 n_2 + 2}{n_2 \varphi_1^2} \right\} \\ - \frac{\varphi_3^2 y^2}{2 f_3} & \left\{ \frac{n_3^3 a_5^2 + (2 n_3^3 - 2 n_3^2 - n_3) a_5 a_6 + (n_3^3 - 2 n_3^2 + 2) a_6^2}{n_3 a_5^2 a_6^2} \right. \\ & \left. + \frac{(3 n_3^2 + n_3) a_5 + (3 n_3^2 - 3 n_3 - 4) a_6}{n_3 a_5 a_6 \varphi_2} + \frac{3 n_3 + 2}{n_3 \varphi_2^2} \right\} \\ - \frac{\varphi_3^2 \{ (n_1 - 1) b - a_1 \}^2 d_1}{n_1 a_1^2 b^2} & - \frac{\varphi_3^2 \{ (n_2 - 1) \varphi_1 + a_3 \}^2 d_2}{n_2 a_3^2 \varphi_1^2} \\ - \frac{\varphi_3^2 \{ (n_3 - 1) \varphi_2 + a_5 \}^2 d_3}{n_3 a_5^2 \varphi_2^2} & - \frac{\varphi_3^2 c_1}{\varphi_1^2} - \frac{\varphi_3^2 c_2}{\varphi_2^2} \end{aligned} \right.$$

In dieser Weise könnte man fortfahren, die Lage des Schneidungspunktes des gebrochenen Strahles mit der Axe nach dem Durchgange durch beliebig viele Linsen zu bestimmen; doch haben wir Grund hier stehen zu bleiben.

5. Bedingungen für die achromatische und aplanatische Linse im allgemeinen.

An eine vollkommene Linse stellt man die Forderung, dass alle Strahlen verschiedener Wellenlänge, welche aus einem Punkte der Axe vor der Linse ausgehen, mag dieser Punkt näher oder entfernter sein, und mögen die Strahlen näher oder ferner vom Mittelpunkte der Vorderfläche der Linse auffallen, nach der Brechung durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Axe gehen.

Betrachtet man angesichts dieser Forderung die Gleichung (1) des vorhergehenden Paragraphen, so sieht man, dass φ_1 ein gemeinschaftlicher Factor ihrer Glieder ist. Nun kann ein Product von Factoren, welche verschiedene unabhängig veränderliche Grössen enthalten, nur dann constant sein, wenn jeder seiner Factoren constant ist; mithin kann, da n_1 , folglich auch

$$\varphi_1 = \frac{a_1 a_2 b}{(n_1 - 1) (a_1 + a_2) b - a_1 a_2}$$

für verschiedene Wellenlängen verschiedene Werthe annimmt, eine einfache Linse obigen Forderungen nicht entsprechen.

Für die Glieder der rechten Seite in Gleichung (2) des § 4. ist gemeinschaftlicher Factor

$$\varphi_2 = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b}{(n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4}$$

Die Vorbedingung dafür, dass eine Doppellinse den genannten Forderungen genüge, würde demnach sein, dass der Werth von φ_2 , insbesondere also sein Nenner für jeden gegebenen endlichen oder unendlich grossen Werth von b constant sei. Nun hat man in § 3. gefunden, dass die mit der Wellenlänge l veränderlichen Werthe von n vollständig den Beobachtungen entsprechend ausgedrückt werden durch die Function

$$n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-4}$$

folglich nimmt der Nenner die Form an

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (\alpha_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4 \\ & + \{ \beta_1 (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + \beta_2 (a_3 + a_4) a_1 a_2 b \} l^{-1} \\ & + \{ \gamma_1 (a_1 + a_2) a_3 a_4 b + \gamma_2 (a_3 + a_4) a_1 a_2 b \} l^{-4} \end{aligned}$$

Soll derselbe von der Wellenlänge l unabhängig sein, so muss jedes der beiden letzteren Glieder für sich gleich Null sein. Diess setzt aber voraus, dass

$$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_1 : \gamma_2$$

Unter den sieben Fraunhofer'schen Glasarten finden sich nun nicht zwei, für welche diese Bedingung erfüllt wäre, und es wäre überhaupt ein ausserordentlicher, bisher von den Optikern unsers Wissens vergeblich angestrebter Zufall, wenn sie einmal für zwei Gläser streng erfüllt sein sollte, welche in ihrem optischen Verhalten sonst hinreichend verschieden wären, um eine brauchbare Linse zu liefern. Also auch eine Doppellinse kann nicht genau achromatisch sein.

Wir stellen uns demnach die Aufgabe, aus drei Glasarten eine Linse darzustellen, welche den bezeichneten Ansprüchen so vollständig als möglich entspricht.

Im Ausdruck (3) des § 4. für $Q_3 F_3$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b : [(n_1 - 1) (a_1 + a_2) a_3 a_4 a_5 a_6 b \\ & + (n_2 - 1) (a_3 + a_4) a_1 a_2 a_5 a_6 b \\ & + (n_3 - 1) (a_5 + a_6) a_1 a_2 a_3 a_4 b - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6] \end{aligned}$$

gemeinschaftlicher Factor aller Glieder. Setzt man in ihm

$$n_1 = \alpha_1 + \beta_1 l^{-1} + \gamma_1 l^{-4},$$

$$n_2 = \alpha_2 + \beta_2 l^{-1} + \gamma_2 l^{-4},$$

$$n_3 = \alpha_3 + \beta_3 l^{-1} + \gamma_3 l^{-4}$$

so wird derselbe von l unabhängig, wenn die Bedingungsgleichungen erfüllt sind

$$(4) \quad \beta_1 \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \beta_2 \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + \beta_3 \frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6} = 0$$

$$(5) \quad \gamma_1 \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \gamma_2 \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + \gamma_3 \frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6} = 0$$

Hierdurch werden die gegenseitigen Verhältnisse der drei Quotienten $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}$, $\frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4}$, $\frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6}$ bestimmt. Nimmt man hierzu noch die Bedingung

$$(6) \quad (\alpha_1 - 1) \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + (\alpha_2 - 1) \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + (\alpha_3 - 1) \frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6} = 1$$

so bestimmen sich durch die drei Gleichungen (4), (5), (6) die Grössen jener drei Quotienten. Man wird bemerken, dass die Hinzufügung der Bedingungsgleichung (6) die Bedeutung hat, dass die ideale Hauptbrennweite der Linse, d. h. die Brennweite für eine unendliche Entfernung des leuchtenden Punktes, abgesehen von dem Einfluss der Grössen y , d und c der Gleichung (3), welche wir \mathfrak{F}_3 nennen wollen, der Einheit gleich ist.

Demnach sind zur vollständigen Bestimmung der sechs Grössen a_1 , a_2 , ... a_6 noch drei Bedingungsgleichungen verfügbar.

Wenn man nun in dem Ausdrucke für $Q_3 F_3$ Gleichung (3) den gemeinschaftlichen Factor φ_3 absondert, so besteht der andere Factor nächst einem Gliede, welches $= 1$, aus drei Gliedern mit dem gemeinschaftlichen Factor y^2 und aus fünf Gliedern, welche von c_1 , c_2 , d_1 , d_2 , d_3 abhängen. Sollen jene drei mit y^2 behafteten Glieder constant werden, d. h. soll allen Strahlen, welche auf verschiedene Punkte der Linse auffallen, nach der Brechung derselbe Schneidungspunkt mit der Axe zukommen, wenigstens abgesehen von dem Einflusse der Grössen c und d , so ist diess nur dadurch möglich, dass die Summe jener drei Glieder gleich Null wird. Nach Ausschcheidung der Factoren φ_3 und y sind aber diese drei Glieder noch abhängig von den mit der Wellenlänge veränderlichen

Grössen n_1, n_2, n_3 , ferner von der Grösse b , welche jeden beliebigen Werth soll annehmen können, endlich von den sechs zu bestimmenden Grössen $a_1, a_2, \dots a_6$. Führt man hierin wieder für n_1, n_2, n_3 die oben genannten Formeln ein und entwickelt die verschiedenen von ihnen vorkommenden Potenzen, so lassen sich sämtliche Glieder so ordnen, dass man erstens diejenigen Glieder vereinigt, welche ausser den unbekannten Grössen $a_1, a_2, \dots a_6$ nur noch die gegebenen α enthalten, zweitens diejenigen, welche ausser diesen nur noch die β und l^{-1} , drittens diejenigen, welche ausser den erst genannten nur noch β und l^{-2} , u. s. f., ferner diejenigen, welche ausser den genannten Grössen noch $\frac{1}{b}$, sowie diejenigen, welche $\frac{1}{b^2}$ enthalten, und zwar sind diese letzteren Glieder wieder nach den verschiedenen darin vorkommenden Potenzen von l^{-1} zu ordnen. Jedes dieser Glieder müsste einzeln gleich Null sein, wenn die mit y^2 behafteten Glieder für alle Strahlen der verschiedenen Wellenlängen und für jede Entfernung des leuchtenden Objectes verschwinden sollten. Diess übersteigt offenbar bei weitem die Anzahl der noch verfügbaren Bedingungsgleichungen, welche nur drei war. Allein eine einfache Betrachtung ist geeignet, uns auf einen Weg zu führen, der sich weiter verfolgen lässt.

Bei der Entwicklung der Gleichungen (1) bis (3) sind die vierte und die höheren Potenzen von $\frac{y}{a}$ gegen die Einheit vernachlässigt worden, theils weil die Rechnung sonst zu kaum überwindlichen Schwierigkeiten geführt hätte, theils indem wir eben deshalb uns stillschweigend verbindlich machten, die Oeffnung der Linse nicht grösser zu nehmen, als dass die vierten und höheren Potenzen von $\sin o_1$, welches der Maximalwerth von $\frac{y}{a_1}$ ist, ohne merklichen Fehler gegen die Einheit verschwinden. \mathfrak{F}_3 ist durch Gleichung (6) zur Einheit gemacht, φ_3 ist nicht wesentlich von \mathfrak{F}_3 verschieden, und die a sind gleichfalls mit \mathfrak{F}_3 von einerlei Ordnung. Man nehme nun beispielsweise an, die Grenze, von welcher an man sich die Vernachlässigung der Glieder gestattet, sei $\sin^4 o_1 = 0,00001$, dann dürften unter den mit $-\varphi_3 y^2$ mul-

multiplicirten Gliedern mit gleichem Rechte diejenigen vernachlässigt werden, welche etwa 0,003 oder weniger betragen, weil sie bei ihrer Multiplication mit $\varphi_3 y^2$ unter der Grenze des zu Berücksichtigenden fallen. Nun kann man sich aus den Formeln des § 2. und § 3. überzeugen, dass die Werthe des Gliedes βl^{-1} je nach den verschiedenen Wellenlängen und Glasarten zwischen 0,02 und 0,05, die Werthe des Gliedes γl^{-4} etwa zwischen 0,001 und 0,02 liegen, so dass sowohl die höheren Potenzen von βl^{-1} , als auch γl^{-4} selbst nebst seinen höheren Potenzen fast in die Grenzen fallen, welche unter den Factoren von φy^2 vernachlässigt werden können, dass also nicht allein die Functionen von l selbst, welche für die verschiedenen n einzuführen sind, sondern auch die von ihnen zu bildenden Potenzen in diesem Theil der Rechnung fast ohne merklichen Fehler auf ihre beiden ersten Glieder reducirt werden dürfen. Hieraus ergiebt sich, dass man das Ziel noch vollständiger erreichen wird, wenn man in den mit y^2 verbundenen Aggregaten für die n nicht die Functionen $\alpha + \beta l^{-1}$ mit Weglassung des zugehörigen γl^{-4} einsetzt, sondern neue zweigliedrige Functionen berechnet, welche mit möglichster Annäherung die Brechungsexponenten ausdrücken und in ihrem zweiten Gliede eine hierzu zweckmässig zu wählende Potenz von l^{-1} enthalten. Man erinnert sich aus § 2., dass die Functionen $\alpha + \beta l^{-2}$ und $\alpha + \beta l^{-3}$ die Beobachtungen besser ausdrückten, als $\alpha + \beta l^{-1}$, und dass man eine noch vollständigere Uebereinstimmung mit den Beobachtungen erwarten durfte, wenn man als Factor des zweiten Gliedes eine zwischen der zweiten und dritten liegende Potenz von l^{-1} wählte. Einige Versuche ergaben, dass die vortheilhafteste Function $\alpha + \beta l^{-\frac{7}{3}}$ ist. Durch sie findet man die Brechungsexponenten mit den beobachteten bis auf wenige Einheiten der vierten Decimale übereinstimmend. Den numerischen Beweis hierfür werden wir weiter unten führen. Setzt man also $n_1 = \alpha_1' + \beta_1' l^{-\frac{7}{3}}$, $n_2 = \alpha_2' + \beta_2' l^{-\frac{7}{3}}$, $n_3 = \alpha_3' + \beta_3' l^{-\frac{7}{3}}$, entwickelt die davon vorkommenden Potenzen auf ihre ersten beiden Glieder, vereinigt unter den von b unabhängigen Gliedern diejenigen für sich, welche l nicht enthalten, und diejenigen, welche $l^{-\frac{7}{3}}$ ent-

halten, und setzt jedes von beiden Aggregaten gleich Null, so erhält man zwei neue zu den obigen drei (4), (5) und (6) hinzukommende Bestimmungsgleichungen für die Halbmesser und man hätte noch über eine zu disponiren.

Es sind jetzt diejenigen unter den mit y^2 verbundenen Gliedern zu betrachten, welche $\frac{1}{b}$ enthalten. Verfolgt man bei der Darstellung der Linse den Zweck, dass diese Glieder für sich verschwinden, so heisst diess, der Linse die Beschaffenheit zu verleihen, dass sie für alle Entfernungen des Objects aplanatisch ist. Nun kommt, ausser den von b unabhängigen Gliedern, sowohl $\frac{1}{b}$ als $\frac{1}{b^2}$ vor. Es müsste also ausser den ersteren auch jede der beiden letzteren Gliedersummen Null werden, zu geschweigen dass zwecks der Erhaltung der vollkommenen Achromasie hierunter wieder die von l unabhängigen und die l enthaltenden Glieder zu sondern wären. Es hängt nun ganz und gar von der Bestimmung der Linse ab, wie weit die Rücksicht auf b zu gehen hat. Soll diese Linse Objectivlinse eines astronomischen Fernrohrs sein, so ist $\frac{1}{b}$ unter allen Umständen Null und die sechste Bestimmungsgleichung, welche noch verfügbar ist, ist willkürlich. Ist die Linse aber zu solchen Zwecken bestimmt, wobei das Object in endlicher, doch aber hinreichend grosser Entfernung vor der Linse sich befindet, so ist es erforderlich, eine neue Bestimmungsgleichung derart zu bilden, dass die mit $\frac{1}{b}$ behafteten Glieder für sich verschwinden; für die Brechungsexponenten n sind in diesen Gliedern nicht die Functionen von l^{-1} , sondern einfache Mittelwerthe einzusetzen. Rechnet man auf sehr grosse Nähe der Objecte, so müsste man auch eine Bestimmungsgleichung dafür ableiten, dass die mit $\frac{1}{b^2}$ behafteten Glieder verschwinden, und müsste dann dafür eine der beiden Bestimmungsgleichungen aufgeben, welche für die von $\frac{1}{b}$ unabhängigen Glieder galten, indem man dort für den genaueren Ausdruck $n = \alpha + \beta l^{-\frac{7}{3}}$ einfache Mittelwerthe von n benutzte. Immer muss vor Bildung der Bestimmungsgleichungen aus dem beabsichtigten Gebrauch der

Linse die Entscheidung getroffen werden, dass die zu vernachlässigenden Glieder den numerisch kleinsten Werth haben.

Endlich verdienen in Formel (3) noch diejenigen fünf Glieder Beachtung, welche d_1 , d_2 , d_3 , c_1 und c_2 zu Factoren haben. Da von diesen eben genannten Grössen die ersten drei nothwenig positiv, die beiden letzten aber positiv oder Null sind, im übrigen aber alle mit entschieden positiven Factoren verbunden sind, und endlich jene fünf Glieder übereinstimmendes Vorzeichen haben, nämlich negatives, so ist keineswegs ersichtlich, wie man dieses Aggregat zu einer constanten, d. h. von der Wellenlänge unabhängigen Grösse machen könnte. Es wird sich aber ein Weg darbieten, auf welchem wir mit sehr geringer Beeinträchtigung der durch die bisher angeführten Bedingungsgleichungen bestimmten Halbmesser den bedeutenden Fehler verschwinden lassen können, welcher aus den letztgenannten fünf Gliedern für die Achromasie der Linse entspringt. Derselbe wird am deutlichsten werden bei einer eingehenden Berechnung eines numerischen Beispiels.

6. Numerische Berechnung einer dreifachen Objectivlinse für astronomische Zwecke.

Wir stellen uns die Aufgabe, aus drei von den sieben Fraunhofer'schen Glasarten eine astronomische Objectivlinse darzustellen, um die allgemeinen Sätze des vorigen Paragraphen an einem Beispiel zu veranschaulichen und um zu erproben, was die durch § 2. und 3. erwiesene Formel $n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-4}$ für die praktische Anwendung zu leisten vermag.

Wir wählen zu den erforderlichen drei Glasarten Flintglas No. 13, Flintglas No. 23 und Crownglas No. 13. Da in unserm Falle unter allen Umständen $b = \infty$, also die sechste Bestimmungsgleichung willkürlich ist, so wollen wir die Verfügung treffen, es sei $a_3 = -a_2$, d. h. es soll, indem auch $c_1 = 0$ genommen wird, die Rückfläche der ersten Linse mit der Vorderfläche der zweiten zusammenfallen.

Für die Brechungsexponenten der genannten drei Gläser fand sich § 2. Tafel VIII und § 3. Tafel XVIII und XXII:

$$\begin{aligned} \text{für Flintglas No. 13} \quad n_1 &= \alpha_1 + \beta_1 l^{-1} + \gamma_1 l^{-4} \\ &= 1,59434495 + 0,021163432 l^{-1} \\ &\quad + 0,00058262926 l^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für Flintglas No. 23} \quad n_2 &= \alpha_2 + \beta_2 l^{-1} + \gamma_2 l^{-4} \\ &= 1,59490854 + 0,019865054 l^{-1} \\ &\quad + 0,00061619373 l^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für Crown Glas No. 13} \quad n_3 &= \alpha_3 + \beta_3 l^{-1} + \gamma_3 l^{-4} \\ &= 1,50610696 + 0,011838115 l^{-1} \\ &\quad + 0,00021838151 l^{-4} \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4), (5), (6) des § 4. findet man

$$= (\alpha_1 - 1)(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + (\alpha_2 - 1)(\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + (\alpha_3 - 1)(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)$$

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2}{J} = \iota$$

$$\frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} = \frac{\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3}{J} = \kappa$$

$$\frac{a_5 + a_6}{a_5 a_6} = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{J} = \lambda$$

das ist mit Einsetzung obiger numerischer Werthe, indem wir uns jetzt siebenstelliger Logarithmen zur Rechnung bedienen

$$J = 0,0000003389684, \quad \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2 = -0,0000029564116,$$

$$\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3 = +0,0000022755303,$$

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 = +0,0000014668131$$

$$(7) \quad \iota = -8,721791$$

$$(8) \quad \kappa = +6,713104$$

$$(9) \quad \lambda = +4,327285$$

Macht man die Probe für die Genauigkeit der Rechnung, indem man die Werthe (7), (8), (9) in (4), (5), (6) substituirt, so erhält man

$$-0,18458304 + 0,13335616 + 0,05122690 = 0,00000002 = 0$$

$$-0,0050815704 + 0,0041365725 + 0,0009449991 = 0,0000000002 = 0$$

$$-5,1837527 + 3,9936831 + 2,1900693 = 0,9999997 = 1$$

also Identität bis in die achte geltende Stelle.

Es ist gut, sich sogleich hier ein Urtheil darüber zu bilden, inwieweit durch die in (7), (8), (9) gegebenen Werthe von ι , κ , λ die Gleichung $\mathfrak{F}_3 = 1$, d. i.

$$\frac{1}{(n_1 - 1) \iota + (n_2 - 1) \kappa + (n_3 - 1) \lambda} = 1$$

befriedigt wird, wenn man in ihr für n_1, n_2, n_3 nicht die oben angeführten Formeln, sondern die von Fraunhofer als Ergebnisse der Beobachtung mitgetheilten Zahlen, betreffs Flintglas No. 23 die Mittelwerthe der beiden Reihen einsetzt. Der Nenner des genannten Bruches wird dann für den Strahl

$$B - 5,4750946 + 4,2062965 + 2,2688473 = 1,0000492 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 0,9999508$$

$$C - 5,4919462 + 4,2189169 + 2,2731178 = 1,0000885 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 0,9999115$$

$$D - 5,5386513 + 4,2538682 + 2,2847288 = 0,9999457 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 1,0000543$$

$$E - 5,5995992 + 4,2998733 + 2,2993983 = 0,9996724 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 1,0003277$$

$$F - 5,6539878 + 4,3418210 + 2,3122287 = 1,0000619 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 0,9999381$$

$$G - 5,7588675 + 4,4229189 + 2,3363361 = 1,0003875 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 0,9996126$$

$$H - 5,8528627 + 4,4956509 + 2,3570029 = 0,9997911 \\ \text{folglich } \mathfrak{F}_3 = 1,0002089$$

Es bleiben also Abweichungen von der Einheit um 3 bis 4 Einheiten in der vierten Decimalbruchstelle nach der positiven und negativen Seite. Diese Abweichungen sind lediglich in den Differenzen begründet, welche zwischen den beobachteten Fraunhofer'schen Werthen der Brechungsexponenten und den durch die Formeln zu berechnenden bestehen. In der That, diese Differenzen Δ betragen in Einheiten der sechsten Decimalbruchstelle nach den citirten Tafeln

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
bei Flintglas No. 13	— 13	+ 17	+ 11	— 19	— 17	+ 35	— 15
Flintglas No. 23	— 18,8	+ 5,2	+ 20,4	+ 21,2	— 30,5	— 4,8	+ 7,4
Crownglas No. 13	— 9	+ 6	+ 4	+ 5	0	— 11	+ 6

Multiplicirt man dieselben bezüglich mit ι, κ, λ und addirt die Producte, so erhält man in Einheiten der sechsten Decimale

<i>B</i>	+	113,4	—	126,2	—	38,9	=	—	51,7
<i>C</i>	—	148,3	+	34,9	+	26,0	=	—	87,4
<i>D</i>	—	95,9	+	136,9	+	17,3	=	+	58,3
<i>E</i>	+	165,7	+	142,3	+	21,6	=	+	329,6
<i>F</i>	+	148,3	—	204,7			=	—	56,4
<i>G</i>	—	305,3	—	32,2	—	47,6	=	—	385,1
<i>H</i>	+	130,8	+	49,7	+	25,9	=	+	206,4
Σ	+	8,7	+	0,7	+	4,3	=	+	13,7

Diess sind aber die oben gefundenen Unterschiede $\mathfrak{F}_3 - 1$ so genau, als man in Anbetracht dessen erwarten kann, dass die Differenzen Δ nur auf zwei geltende Stellen angegeben sind; dass die Summe der ersten Posten $+8,7 = (-1) \cdot (-8,7)$, die der zweiten Posten $+0,7 = (+0,1) \cdot (6,7)$, die der dritten $+4,3 = (+1) \cdot (4,3)$ ist, dient zur Controle der Rechnung.

Bei den drei Linien *E*, *G* und *H* wirken die Differenzen Δ zur Berechnung von \mathfrak{F}_3 zufälliger Weise in gleichem Sinne störend, weil das Δ für Flintglas No. 13 entgegengesetztes Vorzeichen hat, als bei Flintglas No. 23 und bei Crown Glas No. 13 und weil ι entgegengesetztes Zeichen hat, als κ und λ ; daher sind die Abweichungen zwischen \mathfrak{F}_3 und der Einheit bei jenen drei Linien am stärksten. Diese Abweichungen hätten unter Umständen eine grössere Höhe erreichen können, nämlich dann, wenn zugleich alle drei Differenzen Δ absolut genommen ihre grössten zulässigen Werthe gehabt hätten; wäre z. B. Δ für das erste Glas nur $+35$ und in jedem der beiden folgenden Gläser in derselben Spectrallinie -35 der sechsten Decimalstelle, und das sind noch nicht die zulässigen Maximalwerthe von Δ , so würde für \mathfrak{F}_3 eine Gesamtdifferenz von 692 in der sechsten Decimalstelle, oder 7 Einheiten der vierten Decimalstelle zum Vorschein gekommen sein, ohne dass man sagen könnte, dass die zur Berechnung der idealen Brennweiten der drei Einzellinsen zu Grunde gelegten Brechungsexponenten von den wirklich beobachteten um einen grösseren Betrag differiren, als die Messungen der Brechungsexponenten bei der grössten Sorgfalt der Beobachtung selbst differiren.

Wir ziehen aus diesen Berechnungen von \mathfrak{F}_3 folgendes bemerkenswerthe Resultat: Wenn man aus den Formeln

$n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-4}$ die Einzelbrennweiten der dreifach-zusammengesetzten Linse berechnet, und man stellt dann die Probe an, indem man die beobachteten Brechungsexponenten der drei Gläser für die sieben Spectrallinien einsetzt, so findet man \mathfrak{F}_3 nicht durchaus gleich 1, es dürfen sich Differenzen bis zu 7 Einheiten der vierten Decimalstelle einstellen, die zusammengesetzte Linse erscheint so zu sagen nicht achromatisch; doch müssen wir diese chromatische Abweichung nur eine scheinbare, eine unregelmässige nennen, insofern sie sich von der wahren, regelmässigen chromatischen Abweichung dadurch unterscheidet, dass letztere für die Strahlen $B, C, \dots H$ stetig zunehmende, oder stetig abnehmende, erstere dagegen um einen mittleren Werth hin und her schwankende Werthe der Brennweite liefert.

Wir kehren zur Aufstellung der übrigen Bedingungengleichungen für die sechs Halbmesser zurück.

In den mit $-\varphi_3 y^2$ behafteten Gliedern führen wir für n die zweigliedrigen Functionen $n = \alpha' + \beta' l^{-\frac{7}{3}}$ ein, und haben zunächst die numerische Berechnung derselben für die drei uns beschäftigenden Glasarten vorzunehmen. Die Coefficienten α', β' bestimmen sich aber durch die Gleichungen

$$\alpha' = \frac{1}{J} \{ \Sigma l^{-\frac{14}{3}} \Sigma N - \Sigma l^{-\frac{7}{3}} \Sigma l^{-\frac{7}{3}} N \}$$

$$\beta' = \frac{1}{J} \{ 7 \Sigma l^{-\frac{7}{3}} N - \Sigma l^{-\frac{7}{3}} \Sigma N \}$$

$$J = 7 \Sigma l^{-\frac{14}{3}} - (\Sigma l^{-\frac{7}{3}})^2$$

Es findet sich durch Gebrauch zehnstelliger Logarithmen, welcher hier ausreicht

$$\Sigma l^{-\frac{7}{3}} = 34,063577633$$

$$\Sigma l^{-\frac{14}{3}} = 198,41641155$$

und für Flintgl. 23 $\Sigma l^{-\frac{7}{3}} N = 56,208568916$

demnach für diese Glassorte

$$n = 1,60998138 + 0,006888762 l^{-\frac{7}{3}}$$

Berechnet man nach dieser Formel die zu den Wellenlängen der Linien $B, C, \dots H$ gehörenden Brechungsexponenten, und substrahirt von ihnen die beobachteten, so finden sich in Einheiten der sechsten Decimale die Differenzen

$$\begin{array}{cccccccc} B & C & D & E & F & G & H & \Sigma \Delta \\ -85,4 & -107,4 & -66,1 & +117,1 & +216,6 & +214,6 & -289,4 & 0 \end{array}$$

während die Differenzen für die Formeln $n = a + bl^{-2}$ und $n = a + bl^{-3}$ nach Ausweis von Tafel IV beiderseits bis auf 790 stiegen.

Für Flintglas No. 13 hat man $\Sigma l^{-\frac{7}{3}} N = 56,256160405$

$$n = 1,61119757 + 0,006919829 l^{-\frac{7}{3}}$$

und damit die Differenzen Δ in Einheiten der sechsten Decimale

$$+36, -29, -113, -33, +108, +216, -184, \Sigma \Delta = 1$$

Für Crownnglas No. 13 endlich ist $\Sigma l^{-\frac{7}{3}} N = 52,310820859$, demnach

$$n = 1,51669025 + 0,003260440 l^{-\frac{7}{3}}$$

und damit die Differenzen Δ in Einheiten der sechsten Decimale

$$+194, +86, -113, -173, -133, +13, +126, \Sigma \Delta = 0$$

Wir nehmen hieraus folgende numerische Werthe

$$\log \alpha'_1 = 0,20714880, \quad \log \beta'_1 = 0,84009513 - 3$$

$$\log \alpha'_2 = 0,20682085, \quad \log \beta'_2 = 0,83814120 - 3$$

$$\log \alpha'_3 = 0,18089690, \quad \log \beta'_3 = 0,51327625 - 3$$

Hierdurch wird

$$\frac{1}{f_1} = -5,3307370 - 0,060353262 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_1 f_1} = -3,3085555 - 0,023248942 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_1}{f_1} = -8,5888706 - 0,134128810 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_1^2}{f_1} = -13,838367 - 0,27554145 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{f_2} = 4,0948681 + 0,046244972 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_2 f_2} = 2,5434257 + 0,017841150 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_2}{f_2} = 6,5926617 + 0,102662123 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_2^2}{f_2} = 10,614062 + 0,21069940 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{f_3} = 2,2358662 + 0,014108856 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_3 f_3} = 1,4741747 + 0,006133353 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_3}{f_3} = 3,3911167 + 0,028688671 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_3^2}{f_3} = 5,1432734 + 0,054568365 l^{-\frac{7}{3}}$$

ferner mit Rücksicht darauf, dass bei $b = \infty$, $\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{f_1}$ und

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_1 f_2} = -21,828666 - 0,49365845 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_2 f_1 f_2} = -13,558333 - 0,24861050 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_2}{f_1 f_2} = -35,143742 - 0,94515336 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{f_1^2 f_2} = +116,36286 + 3,9489939 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_2 f_1^2 f_2} = +72,275905 + 2,1435667 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = -2,7632377 - 0,048980944 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_3 f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = -1,8218866 - 0,028378100 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{n_3}{f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = -4,1909752 - 0,083298287 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)^2 = +3,4149992 + 0,099518580 l^{-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{n_3 f_3} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)^2 = +2,2516130 + 0,060775311 l^{-\frac{7}{3}}$$

Substituirt man diese Werthe in die mit $-\varphi_3 y^2$ behafteten Glieder der Gleichung (3) und setzt sowohl die Summe der von l unabhängigen, als die Summe der $l^{-\frac{7}{3}}$ enthaltenden Glieder gleich Null, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{13,838367}{a_2^2} - \frac{5,1682558}{a_4 a_2} - \frac{3,2777368}{a_4^2} + \frac{10,614062}{a_4^2} \\ + \frac{3,9479325}{a_3 a_4} + \frac{2,5155900}{a_3^2} - \frac{127,259892}{a_4} + \frac{14,288104}{a_3} \\ + \frac{5,1432734}{a_6^2} + \frac{1,2684472}{a_5 a_6} + \frac{1,3093894}{a_5^2} - \frac{15,3361633}{a_6} \\ + \frac{3,0043339}{a_5} + 508,3886136 = 0 \end{array} \right.$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} - \frac{0,27554145}{a_2^2} - \frac{0,222472018}{a_1 a_2} - \frac{0,053781714}{a_1^2} + \frac{0,21069940}{a_4^2} \\ + \frac{0,169829582}{a_3 a_4} + \frac{0,041057454}{a_3^2} - \frac{3,32911853}{a_4} - \frac{0,36004273}{a_3} \\ + \frac{0,054568365}{a_6^2} + \frac{0,037650532}{a_5 a_6} + \frac{0,009457729}{a_5^2} - \frac{0,298875805}{a_6} \\ + \frac{0,010560371}{a_5} + 16,55422146 = 0 \end{array} \right.$$

Gleichungen (7), (8), (9), (10), (11) einschliesslich der Gleichung

$$(12) \quad a_3 = -a_2$$

sind die Bestimmungsgleichungen für die 6 Halbmesser.

Setzt man $\frac{1}{a_2} = \iota - \frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_4} = \kappa - \frac{1}{a_3}$, $\frac{1}{a_6} = \lambda - \frac{1}{a_5}$, ausserdem $\frac{1}{a_3} = -\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - \iota$ in (10) und (11) ein, so erhält man

$$(13) \quad - \frac{2,7661285}{a_1^2} - \frac{10,607894}{a_1} + \frac{5,1842156}{a_5^2} - \frac{20,683393}{a_5} + 30,918834 = 0$$

$$(14) \quad - \frac{0,024923874}{a_1^2} - \frac{0,1567047}{a_1} + \frac{0,026375562}{a_5^2} + \frac{0,00009506}{a_5} - 0,1326227 = 0$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{1}{a_5}$, so erhält man

$$(15) \quad \frac{1}{a_1^4} + \frac{18,936100}{a_1^3} + \frac{54,083129}{a_1^2} - \frac{53,496523}{a_1} + 241,10746 = 0$$

diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln

$$\frac{1}{a_1} = -5,3364895 \text{ und } \frac{1}{a_1} = -15,0298997$$

die beiden andern sind complex. Nimmt man die erstere der beiden reellen Wurzeln und bestimmt $\frac{1}{a_5}$ durch die aus (13) und (14) hervorgehende Gleichung

$$\frac{1}{a_5} = \frac{0,10302115}{a_1^2} + \frac{0,97540934}{a_1} + 2,7526860$$

sodann $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_4}$, $\frac{1}{a_6}$ durch (7), (8), (9), so erhält man

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a_1} = -5,3364895, \text{ also } a_1 = -0,1873891 \\ \frac{1}{a_2} = -3,3853017 \quad ,, \quad a_2 = -0,2953946 \\ \frac{1}{a_3} = 3,3853017 \quad ,, \quad a_3 = 0,2953946 \\ \frac{1}{a_4} = 3,3278020 \quad ,, \quad a_4 = 0,3004986 \\ \frac{1}{a_5} = 0,4812730 \quad ,, \quad a_5 = 2,0778230 \\ \frac{1}{a_6} = 3,8460123 \quad ,, \quad a_6 = 0,2600095 \end{array} \right.$$

Es dient zur Probe für die Genauigkeit der Rechnung, dass wir die so gefundenen Werthe beispielsweise in (10) substituiren. Man hat dann

$$\begin{aligned} & -158,59141 - 93,36778 - 93,34378 + 117,54294 \\ & + 44,47588 + 28,82934 - 423,49568 + 48,36951 \\ & + 76,07834 + 2,34787 + 0,30329 - 58,98307 \\ & + 1,44590 + 508,38861 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d. i. } -827,78172 + 827,78171 = 0$$

Die somit bestimmten, in (16) enthaltenen Werthe der 6 Halbmesser sind so beschaffen, dass durch sie für die Strahlen aller Wellenlängen sowohl die in (3) vorkommende Grösse φ_3 , oder vielmehr, da $b = \infty$ vorausgesetzt wurde, das dafür eintretende $\mathfrak{F}_3 = 1$, als auch die Summe der mit y^2 behafteten Glieder gleich Null wird, letzteres wenigstens, soweit die verschiedenen Brechungsexponenten n durch die zweigliedrigen Functionen $\alpha' + \beta' t^{-\frac{7}{3}}$ ausgedrückt und die Entwicklung der verschiedenen Potenzen dieser Brechungsexponenten auf die ersten beiden Glieder reducirt werden dürfen.

Es ist nun nöthig, den Gang parallel der Axe auffallender Lichtstrahlen in numerischen Werthen ohne Vernachlässigung irgend eines Gliedes zu verfolgen und zwar unter Anwendung der nicht durch die Formeln, sondern unmittelbar durch Fraunhofers Beobachtungen gegebenen Brechungsexponenten. Wir setzen dabei voraus, dass die drei Gläser dicht an einander grenzen, dass also $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, ferner, dass die Dicke der vordersten, doppelt concaven Linse an der Achse $d_1 = 0,001$ sei, dass bei den beiden folgenden

Linsen die vordere und hintere Kugelfläche in scharfen Kanten einander schneiden, endlich dass die Oeffnung der Linse so gross sei, dass der Winkelabstand eines Punktes am Rande der Vorderfläche der zweiten Linse von der Axe 8^0 betrage. Der Halbmesser der Linse an der Vorderfläche des ersten Glases ist dann $12^0 40' 23''$, 2; doch da das System der beiden vordern Linsen zerstreuend wirkt und zwischen ihm und der dritten Linse nach dem Rande hin ein luftgefüllter Zwischenraum ist, so gelangen die am Rande der ersten Vorderfläche auffallenden Strahlen nicht in die dritte Linse, sondern den äussersten Strahlen, welche die dritte Linse erreichen sollen, kommt an der vordersten Fläche ein Einfallspunkt zu, dessen Winkelabstand von der Axe nur etwa $12^0 23'$ ist.

Wir werden nun für die Lichtstrahlen, welche auf der Vorderfläche der ersten Linse erstens in der Mitte, nämlich unter $0^0 10'$, zweitens in einem Abstände von 6^0 , drittens in einem Abstände von $12^0 23'$ auffallen, den Gang so genau berechnen, als es mit siebenstelligen Logarithmen, und zwar nach den vortrefflichen Tafeln von Bremiker, möglich ist. In der nachfolgenden Uebersicht Tafel XXXI bedeuten i_1 und r_1 die Winkel, welche der Strahl an der ersten Linsenfläche mit dem Einfallslloth innerhalb der Luft und bezüglich des Glases bildet, ebenso r_2 und r_3 die Winkel zwischen Einfallslloth und Strahl an der zweiten und der damit zusammenfallenden dritten Linsenfläche innerhalb des ersten und bezüglich zweiten Glases, ferner r_4 und i_4 die Winkel zwischen Einfallslloth und Strahl an der vierten Fläche innerhalb des zweiten Glases und bezüglich der Luft, dem analog i_5 und r_5 und endlich r_6 und i_6 , schliesslich ist mit der Bezeichnung Φ die Vereinigungsweite, d. h. der Abstand desjenigen Punktes von der letzten Linsenfläche angegeben, in welchem der gebrochne Strahl die Axe schneidet. Innerhalb jeder der genannten Grössen mit Ausnahme der ersten i_1 finden sich in der Tafel sieben verschiedene Werthe entsprechend den Brechungsexponenten der Spectrallinien $B, C, \dots H$; sie wurden berechnet so zu sagen durch Triangulation, d. h. durch trigonometrische Auflösung von 9 an einander gereihten Dreiecken, so dass es für die ganze Tafel bei sieben Spectrallinien und drei verschiedenen Einfallswinkeln i_1 der Auflösung von 189 Drei-

ecken bedurfte. Die Bruchtheile der Secunden sind für die Centralstrahlen durchgängig auf 4 Decimalstellen, für die unter 6^0 und $12^0 23'$ auffallenden Strahlen auf 3 Decimalstellen angegeben, obwohl für die erstgenannten theilweise bis auf 5 Decimalbruchstellen gerechnet werden musste und andererseits für die Randstrahlen die dritte Decimalbruchstelle theilweise nur unsicher ist.

Zur Vorbereitung für die Rechnung dienen noch folgende Grössen: der Halbmesser der Oeffnung an der ersten Fläche ist unter der gemachten Annahme

$$o_1 = 12^0 40' 23,19, \text{ an der zweiten } o_2 = 8, o_3 = 8,$$

$$o_4 = 7^0 51' 47,70, o_5 = 1^0 8' 1,34, o_6 = 9^0 5' 50'',66$$

die Dicken der Einzellinsen an der Axe sind

$$d_1 = 0,001, d_2 = 0,0057001, d_3 = 0,0036776$$

daher die Abstände von einem Kugelmittelpunkte zum nächsten

$$C_1 C_{2,3} = 0,4837837, C_{2,3} C_4 = 0,5901931, C_4 C_5 = 2,3783216,$$

$$C_5 C_6 = 2,3341549.$$

Tafel XXXI.

i_1	$0^0 10'$	$6^0 0'$	$12^0 23'$
r_1	$0^0 6' 8'',6072$	$3^0 40' 54'',742$	$7^0 34' 14,026$
	$6' 8,1700$	$3^0 40' 39,005$	$7^0 33' 41,524$
	$6' 6,9641$	$3^0 39' 55,585$	$7^0 32' 11,852$
	$6' 5,4027$	$3^0 38' 59,353$	$7^0 30' 15,717$
	$6' 4,0199$	$3^0 38' 9,574$	$7^0 28' 32,921$
	$6' 1,3837$	$3^0 36' 34,645$	$7^0 25' 16,897$
	$5' 59,0529$	$3^0 35' 10,732$	$7^0 22' 23,637$
r_2	$0^0 10' 12'',7983$	$6^0 8' 28'',668$	$12^0 46' 0'',547$
	$10' 13,2370$	$6^0 8' 44,552$	$12^0 46' 33,979$
	$10' 14,4471$	$6^0 9' 28,367$	$12^0 48' 6,210$
	$10' 16,0137$	$6^0 10' 25,113$	$12^0 50' 5,668$
	$10' 17,4012$	$6^0 11' 15,348$	$12^0 51' 51,401$
	$10' 20,0464$	$6^0 12' 51,143$	$12^0 55' 13,026$
	$10' 22,3850$	$6^0 14' 15,826$	$12^0 58' 11,245$

r_3	0° 10' 13",2387	6° 8' 44",617	12° 46' 34",133
	10' 13,6969	6° 9' 1,205	12° 47' 9,045
	10' 14,9621	6° 9' 47,025	12° 48' 45,510
	10' 16,5789	6° 10' 45,580	12° 50' 48,771
	10' 17,9604	6° 11' 35,601	12° 52' 34,073
	10' 20,5835	6° 13' 10,598	12° 55' 54,007
	10' 22,8989	6° 14' 34,447	12° 58' 50,484

r_4	0° 2' 27",4911	1° 28' 10",434	2° 59' 49",349
	2' 27,0442	1° 27' 54,377	2° 59' 16,268
	2' 25,8112	1° 27' 10,004	2° 57' 44,841
	2' 24,2361	1° 26' 23,311	2° 55' 48,114
	2' 22,8890	1° 25' 24,916	2° 54' 8,587
	2' 20,3344	1° 23' 53,004	2° 50' 59,665
	2' 18,0772	1° 22' 31,890	2° 48' 12,939

i_1	0° 3' 59",9049	2° 23' 26",869	4° 52' 42",951
	3' 59,4559	2° 23' 10,661	4° 52' 9,310
	3' 58,2064	2° 22' 25,611	4° 50' 35,788
	3' 56,6215	2° 21' 28,422	4° 48' 37,182
	3' 55,3050	2° 20' 41,035	4° 46' 59,035
	3' 52,7925	2° 19' 10,443	4° 43' 51,558
	3' 50,5453	2° 17' 49,508	4° 41' 4,065

i_5	0° 3' 14",2791	1° 56' 59",517	4° 4' 20",862
	3' 14,7393	1° 57' 16,170	4° 4' 55,587
	3' 16,0208	1° 58' 2,439	4° 6' 32,097
	3' 17,6475	1° 59' 1,194	4° 8' 34,564
	3' 18,9979	1° 59' 49,938	4° 10' 16,117
	3' 21,5785	2° 1' 23,106	4° 13' 30,085
	3' 23,8833	2° 2' 46,318	4° 16' 23,329

r_5	0° 2' 7",4542	1° 16' 44",534	2° 40' 13,403
	2' 7,6733	1° 16' 52,467	2° 40' 29,909
	2' 8,2881	1° 17' 14,638	2° 41' 16,057
	2' 9,0655	1° 17' 42,731	2° 42' 14,476
	2' 9,6972	1° 18' 5,476	2° 43' 1,736
	2' 10,9029	1° 18' 49,004	2° 44' 32,087
	2' 11,9901	1° 19' 28,231	2° 45' 53,518

r_6	0° 6' 6",8260	3° 39' 54",843	7° 32' 40,253
	6' 6,6229	3° 39' 47,536	7° 32' 25,411
	6' 6,0526	3° 39' 27,121	7° 31' 43,873
	6' 5,3336	3° 39' 1,288	7° 30' 51,339
	6' 4,7498	3° 38' 40,468	7° 30' 9,223
	6' 3,6380	3° 38' 0,621	7° 28' 48,645
	6' 2,6317	3° 37' 24,635	7° 27' 35,904
i_6	0° 9' 19",1575	5° 35' 31",286	11° 32' 41",830
	9' 19,2096	5° 35' 33,194	11° 32' 46,217
	9' 19,3223	5° 35' 37,440	11° 32' 56,166
	9' 19,4617	5° 35' 42,590	11° 33' 8,218
	9' 19,6493	5° 35' 49,682	11° 33' 24,465
	9' 19,9690	5° 36' 1,545	11° 33' 52,033
	9' 20,1513	5° 36' 8,530	11° 34' 9,216
Φ	0,9542107	0,9535543	0,9513979
	0,9539426	0,9532907	0,9511270
	0,9534538	0,9527976	0,9506137
	0,9528812	0,9522333	0,9500321
	0,9518331	0,9511557	0,9489101
	0,9501705	0,9494758	0,9471392
	0,9494725	0,9487606	0,9463517

Man erkennt hieraus, dass die Linse jetzt noch weder achromatisch, noch auch völlig aplanatisch ist; denn Φ nimmt für die Strahlen verschiedener Wellenlängen von der Spectrallinie B bis H stetig ab, und zwar beläuft sich der chromatische Fehler beim Einfallswinkel 0° 10' auf 0,0047382, beim Einfallswinkel 6° auf 0,0047934, beim Einfallswinkel 12° 23' auf 0,0050462; die sphärische Abweichung aber beträgt zwischen den Central- und den Randstrahlen für die Linie

B	0,0028128
C	0,0028156
D	0,0028401
E	0,0028491
F	0,0029230
G	0,0030313
H	0,0031208

Diess Resultat kommt durchaus nicht unerwartet; es erklärt sich neben dem Umstande, dass Φ nicht = 1, sondern zwischen

0,9463517 und 0,9542107 gefunden worden ist, aus dem Einfluss der von d_1 , d_2 , d_3 abhängigen Glieder der Gleichung (3) § 4., sowie aus dem Einfluss der vernachlässigten, die höheren Potenzen von y und von d enthaltenden Glieder. In der That, berechnet man die Summe der mit d_1 , d_2 , d_3 behafteten Glieder für die beiden äussersten Strahlen B und H , indem man

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= 1, \quad \frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{f_1} = \iota(n_1 - 1), \quad \frac{1}{\varphi_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \\ &= \iota(n_1 - 1) + \kappa(n_2 - 1)\end{aligned}$$

zu Grunde legt, so erhält man für den Strahl B dieselbe

$$= 0,0068944 + 0,0394199 + 0,0024927 = 0,0488070$$

und für den Strahl H

$$= 0,0076744 + 0,0438952 + 0,0028550 = 0,0544246,$$

so dass sich durch sie die Vereinigungsweite von 1 vermindern würde auf 0,9511930 und bezüglich 0,9455754, Zahlen, welche sich von den oben gefundenen Werthen bei $0^\circ 10'$ Einfallswinkel nur wenig unterscheiden; die noch bleibenden Differenzen, sowie die Fehler gegen die Aplanasie erklären sich aus dem Einfluss der vernachlässigten Glieder.

Es bietet sich aber ein einfaches Mittel dar, die genannten Fehler fast völlig zu beseitigen. Was die chromatische Abweichung anlangt, so bedenke man, dass der Vereinigungspunkt der Strahlen B nach Ausweis der Tafel XXXI weiter von der Linse absteht, als der der Strahlen H ; bewirkt man nun durch eine geringe Aenderung einer Linsenfläche, oder auch mehrerer, dass diese Vereinigungspunkte in grössere Entfernung rücken, so wird die Zunahme des Abstandes für die stärker brechbaren Strahlen gleichzeitig mehr betragen, als für die geringerer Brechbarkeit und man wird also eine solche Aenderung der Linsenflächen finden können, dass alle Strahlen verschiedner Wellenlängen einen gemeinsamen Vereinigungspunkt annehmen. Dehnt man diese Betrachtung auf mehrere Linsenflächen aus, so wird sich zugleich eine Methode darbieten, um den noch vorhandenen Fehler der sphärischen Abweichung zu corrigiren. Um diess alles rechnend verfolgen zu können, haben wir zuvörderst Mittelwerthe für die Vereinigungsweite festzustellen.

Für die in der Mitte (unter $0^\circ 10'$) einfallenden Strahlen

B ist $\Phi = 0,9542107$, für die unter 6° einfallenden $= 0,9535543$, also für den mittelsten kreisförmigen Theil der Linse von 6° Halbmesser durchschnittlich $0,9538825$, während es für die Zone, deren innerer Radius 6° , deren äusserer Radius $12^\circ 23'$ ist, durchschnittlich $0,9524761$ ist. Da nun die genannten beiden Flächentheile der Linse sich wie $\sin^2 6^\circ : (\sin^2 12^\circ 23' - \sin^2 6^\circ)$, d. i. wie $1092620 : 3506312$ verhalten, so darf man für den mittleren Abstand des Vereinigungspunktes der Strahlen B von der Linse $0,9528103$ annehmen. Führt man dieselbe Betrachtung für alle Strahlen $B, C, \dots H$ aus, so erhält man die in Tafel XXXII unter der Ueberschrift „wahre mittlere Werthe von Φ “ angegebenen Zahlen. Dieselben sind jedenfalls eine sehr verwickelte Function der Wellenlänge; diess leuchtet schon ein, wenn man die Summe der von d_1, d_2, d_3 abhängigen Glieder betrachtet, die den Hauptantheil der Abweichung von der Einheit betragen, und in denen die drei verschiednen n in verschiedenen Potenzen im Zähler und im Nenner vorkommen. Dennoch aber kann man — und diess thun wir aus einem Grunde, der nachher seine Rechtfertigung finden wird — sehr annähernd auch diese Werthe von Φ , wie diess schon von den Grössen n gilt, als eine Function der Wellenlänge von der Form $a + bl^{-1} + cl^{-4}$ ausdrücken. Man erhält als angenähertsten Ausdruck nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$(17) \quad \Phi = 0,9567568 - 0,002468429 l^{-1} - 0,00006967476 l^{-4}$$

Die für die Wellenlängen von $B, C, \dots H$ daraus durch Rechnung hervorgehenden Werthe finden sich in Tafel XXXII unter der Ueberschrift „berechnete mittlere Werthe von Φ “, daneben ihre Differenzen gegen die wahren mittleren Werthe. Diese Differenzen sind nicht grösser, vielmehr noch etwas kleiner, aber im allgemeinen ganz von demselben Verhalten, als die oben von uns als unregelmässige oder scheinbare chromatische Aberration bezeichneten, und documentiren hierdurch ihren Ursprung aus den geringen Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Brechungsexponenten.

Tafel XXXII.

wahre mittlere Werthe von Φ .	berechnete mittlere Werthe von Φ .	Differenzen.
0,9528103	0,9528545	+ 0,0000442
0,9525433	0,9526241	+ 0,0000808
0,9520430	0,9519952	— 0,0000478
0,9514712	0,9511757	— 0,0002955
0,9503801	0,9504396	+ 0,0000595
0,9486677	0,9490119	+ 0,0003442
0,9479268	0,9477414	— 0,0001853

Mittel der
wahren mitt-
leren Werthe. 0,9516198

Will man ferner Mittelwerthe der Vereinigungsweite für alle verschiedenfarbigen Strahlen erhalten, welche in gleichem Winkelabstande vom Mittelpunkte der Linse einfallen, so empfiehlt es sich, dabei auf die verschiedene Helligkeit der verschiedenen Theile des Spectrums Rücksicht zu nehmen. Indem wir dabei die Fraunhofer'schen Helligkeitscoefficienten 32, 94, 640, 480, 170, 31, 6 p. 214 der angeführten Abhandlung „Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens etc.“ zu Grunde legen, finden wir als Mittelwerthe der am Ende der Tafel XXXI gegebenen Grössen:

mittlerer Werth von Φ für den Einfallswinkel	0° 10'	0,9530368
„ „ „ „ „	6°	0,9523801
„ „ „ „ „	12° 23'	0,9501810

Hieraus ergibt sich die mittlere sphärische Abweichung, d. h. der Rest, welchen man erhält, wenn man von der mittleren Brennweite der Centralstrahlen diejenige der Randstrahlen subtrahirt:

(18) mittlere sphärische Abweichung der nicht corrigirten
Linse = + 0,0028558

Endlich ergibt sich aus den vorgenannten drei mittleren Werthen der Vereinigungsweite mit Berücksichtigung der Flächenräume der Ringflächen ein

(19) Hauptmittel von Φ = 0,9516198

Dasselbe findet sich natürlich auch, und wir haben dadurch die Probe auf die Richtigkeit der numerischen Rechnung

gemacht, wenn man aus den wahren mittleren Werthen der Tafel XXXII mit Benutzung derselben Helligkeitscoefficienten das Mittel berechnet. Uebrigens sind zwar über die Helligkeitsverhältnisse der verschiedenen Farben im Spectrum andere und bessere Massbestimmungen von spätern Forschern getroffen worden, doch würden sich mit ihnen nur sehr unerheblich andere Resultate für die gegenwärtige Untersuchung finden, da die Grössen, deren Mittel gesucht wird, nur sehr wenig unter einander differiren.

Nachdem so über das Gesamtmittel der Vereinigungsweite in (19) und ihre beiden zu corrigirenden Fehler in (17) und (18) klare Erkenntniss gewonnen ist, schreiten wir zum Verfahren der Correction selbst.

Es ist annähernd

$$\varphi_3 = \Phi = 0,9516198$$

und andererseits

$$\frac{1}{\varphi_3} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$$

daher

$$\frac{d\varphi_3}{df_1} = \frac{\varphi_3^2}{f_1^2}$$

und da

$$f_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \iota = \frac{a_1 a_2}{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}$$

so ist

$$\frac{df_1}{da_1} = \frac{(n_1 - 1) a_2^2}{(n_1 - 1)^2 (a_1 + a_2)^2} = \frac{(n_1 - 1) f_1^2}{a_1^2}$$

daher

$$d\varphi_3 = \frac{(n_1 - 1) \varphi_3^2}{a_1^2} da_1$$

oder

$$(20) \quad d\Phi = \frac{(\alpha_1 - 1 + \beta_1 l^{-1} + \gamma_1 l^{-4}) \cdot 0,9516198^2}{a_1^2} \cdot da_1$$

und dem entsprechend für die übrigen Halbmesser der Linsenflächen. Sollte nun durch eine gewisse geringe Aenderung da_1 des Halbmessers a_1 der Werth der Vereinigungsweite von der Wellenlänge unabhängig werden, so müsste die Summe der von der Wellenlänge abhängigen Theile von Φ aus Gleichungen (17) und (20) Null werden. Da nun jeder von beiden Theilen sowohl die erste als die vierte Potenz der unabhängig veränderlichen Grösse l^{-1} enthält, so resultiren zwei Bestim-

mungsgleichungen, denen natürlich durch einen Werth von da_1 nicht genügt werden kann. Lässt man jedoch gleichzeitig an zwei Halbmessern Aenderungen vor sich gehen und summirt die daraus entspringenden durch (20) gegebene Aenderungen von Φ , so erhält man zu dem nämlichen Zwecke zwei Bestimmungsgleichungen, aus denen die Werthe der Aenderungen an zwei Halbmessern hervorgehen. Combinirt man z. B. eine Aenderung an dem vierten und sechsten Halbmesser, so erhält man

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\beta_2 \cdot da_4}{a_4^2} + \frac{\beta_3 \cdot da_6}{a_6^2} = -\frac{b}{\Phi^2} \\ \frac{\gamma_2 \cdot da_4}{a_4^2} + \frac{\gamma_3 \cdot da_6}{a_6^2} = -\frac{c}{\Phi^2} \end{cases}$$

wo b und c der zweite und dritte Coefficient der Gleichung (17) ist, hieraus mit Einführung der gegebenen numerischen Werthe

$$(22) \quad da_4 = 0,009638127, \quad da_6 = 0,003457867$$

Combinirt man dagegen eine Aenderung an dem ersten und fünften Halbmesser, so erhält man

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\beta_1 \cdot da_1}{a_1^2} + \frac{\beta_3 \cdot da_5}{a_5^2} = -\frac{b}{\Phi^2} \\ \frac{\gamma_1 \cdot da_1}{a_1^2} + \frac{\gamma_3 \cdot da_5}{a_5^2} = -\frac{c}{\Phi^2} \end{cases}$$

und durch Einführung der numerischen Werthe

$$(24) \quad da_1 = 0,00486943, \quad da_5 = -0,07621706$$

Auch kann man an den vier Halbmessern a_1, a_4, a_5, a_6 gleichzeitig Aenderungen vornehmen zu dem Zwecke, Φ von der Wellenlänge unabhängig zu machen. Nennt man diese Aenderungen zum Unterschiede von denen in Gleichungen (21) bis (24) $\delta a_1, \delta a_4, \delta a_5, \delta a_6$, so müssten sie den Gleichungen genügen

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\beta_1 \cdot \delta a_1}{a_1^2} + \frac{\beta_2 \cdot \delta a_4}{a_4^2} + \frac{\beta_3 \cdot \delta a_5}{a_5^2} + \frac{\beta_3 \cdot \delta a_6}{a_6^2} = -\frac{b}{\Phi^2} \\ \frac{\gamma_1 \cdot \delta a_1}{a_1^2} + \frac{\gamma_2 \cdot \delta a_4}{a_4^2} + \frac{\gamma_3 \cdot \delta a_5}{a_5^2} + \frac{\gamma_3 \cdot \delta a_6}{a_6^2} = -\frac{c}{\Phi^2} \end{cases}$$

und offenbar besteht eine Weise, diese Gleichungen (25) zu befriedigen, darin, dass man setzt:

$$(26) \quad \begin{cases} \delta a_1 = m \cdot da_1, & \delta a_5 = m \cdot da_5, \\ \delta a_4 = n \cdot da_4, & \delta a_6 = n \cdot da_6, \\ m + n = 1 \end{cases}$$

denn durch Substitution dieser Werthe in (25) gehen letztere Gleichungen mit Rücksicht auf (21) und (23) in die identischen Gleichungen über

$$\frac{mb}{\Phi^2} + \frac{(1-m)b}{\Phi^2} = \frac{b}{\Phi^2}$$

$$\frac{mc}{\Phi^2} + \frac{(1-m)c}{\Phi^2} = \frac{c}{\Phi^2}$$

Theils lässt sich voraussetzen, dass durch solche Vertheilung der Correction auf eine grössere Zahl von Flächen die Beschaffenheit derselben betreffs der übrigen zu erfüllenden Bedingungen am wenigsten alterirt wird, theils wird aber auch, und dies ist noch wichtiger, hierdurch ein Weg eröffnet zur Beseitigung der noch vorhandenen sphärischen Aberration.

Ehe über die Wahl von m und n , die diesem letzteren Zwecke dienen soll, entschieden wird, muss indessen rechnend verfolgt werden, wie sich der Gang der Lichtstrahlen gestaltet, wenn entweder das System (22) für sich, oder das System (24) für sich allein angewendet wird.

Bringt man die Correctionen (22) an, so ist

$$a_1 = -0,1873891, \quad a_2 = -0,2953946, \quad a_3 = +0,2953946$$

$$a_4 = 0,3101368, \quad a_5 = 2,0778230, \quad a_6 = 0,2634674$$

daher, wenn man wieder die Oeffnung der Linse an ihrer zweiten und dritten Fläche 8° sein lässt

$$d_1 = 0,001, \quad d_2 = 0,00561165, \quad d_3 = 0,00363617$$

$$C_1 C_2 = 0,4837837, \quad C_3 C_4 = 0,5999197, \quad C_4 C_5 = 2,3879598,$$

$$C_5 C_6 = 2,3376542$$

Tafel XXXIII.

i_1	$0^\circ 10'$	$12^\circ 23'$
r_1	wie in Tafel XXXI	wie in Tafel XXXI
r_2	" " " "	" " " "
r_3	" " " "	" " " "
r_4	$0^\circ 2' 15'',6367$	$2^\circ 45' 9'',292$
	$2' 15,1891$	$2^\circ 44' 36,181$
	$2' 13,9543$	$2^\circ 43' 4,675$
	$2' 12,3779$	$2^\circ 41' 7,850$
	$2' 11,0293$	$2^\circ 39' 28,232$
	$2' 8,4723$	$2^\circ 36' 19,141$
	$2' 6,2132$	$2^\circ 33' 32,265$

i_1	0° 3' 40",6231	4° 28' 48",487
	3' 40,1494	4° 28' 13,144
	3' 38,8367	4° 26' 34,925
	3' 37,1675	4° 24' 30,144
	3' 35,7752	4° 22' 46,359
	3' 33,1148	4° 19' 27,988
	3' 30,7354	4° 16' 30,734
i_5	0° 3' 21",6967	4° 13' 35",645
	3' 22,1809	4° 14' 12,046
	3' 23,5236	4° 15' 53,173
	3' 25,2333	4° 18' 1,724
	3' 26,6579	4° 19' 48,827
	3' 29,3839	4° 23' 13,530
	3' 31,8190	4° 26' 16,402
r_5	0° 2' 12",3203	2° 46' 16",815
	2' 12,5523	2° 46' 34,179
	2' 13,1978	2° 47' 22,697
	2' 14,0190	2° 48' 24,261
	2' 14,6891	2° 49' 14,408
	2' 15,9714	2° 50' 50,351
	2' 17,1279	2° 52' 16,816
r_6	0° 5' 56",1608	7° 19' 27",609
	5' 55,9440	7° 19' 11,917
	5' 55,3421	7° 18' 27,945
	5' 54,5788	7° 17' 32,255
	5' 53,9552	7° 16' 47,216
	5' 52,7662	7° 15' 21,027
	5' 51,6899	7° 14' 3,201
i_6	0° 9' 2",9003	11° 12' 19",742
	9' 2,9214	11° 12' 22,009
	9' 2,9562	11° 12' 25,953
	9' 2,9918	11° 12' 30,386
	9' 3,0868	11° 12' 39,641
	9' 3,2276	11° 12' 53,863
	9' 3,2496	11° 12' 59,124

Φ	1,0455720	1,0453922
	1,0455369	1,0453374
	1,0456793	1,0454795
	1,0459697	1,0457486
	1,0455687	1,0452805
	1,0452383	1,0448359
	1,0459000	1,0453945

mittlerer Werth von Φ

1,0457422	1,0455199
-----------	-----------

Die sphärische Abweichung ergibt sich hieraus für die Strahlen $B, C, \dots H$ und im Mittel

+ 0,0001798
0,0001995
0,0001998
0,0002211
0,0002882
0,0004024
0,0005055

mittlere sphärische Abweichung

+ 0,0002223

Bringt man dagegen die Correctionen (24) an den Linsenflächen an, so ist

$$a_1 = -0,1825197, \quad a_2 = -0,2953946, \quad a_3 = +0,2953946$$

$$a_4 = 0,3004987, \quad a_5 = 2,0016059, \quad a_6 = 0,2600095$$

daher, wenn man wieder die Oeffnung an der zweiten und dritten Linsenfläche 8^0 sein lässt

$$d_1 = 0,001, \quad d_2 = 0,0057001, \quad d_3 = 0,0036929$$

$$C_1 C_2 = 0,4789143, \quad C_3 C_4 = 0,5901931,$$

$$C_4 C_5 = 2,3021046, \quad C_5 C_6 = 2,2579225$$

Tafel XXXIV.

i_1	$0^0 \ 10'$		$12^0 \ 42' \ 40''$
r_1	$0^0 \ 6'$	$8'',6072$	$7^0 \ 46' \ 8'',028$
	$6'$	$8,1700$	$7^0 \ 45' \ 34,665$
	$6'$	$6,9641$	$7^0 \ 44' \ 2,610$
	$6'$	$5,4027$	$7^0 \ 42' \ 3,401$
	$6'$	$4,0199$	$7^0 \ 40' \ 17,880$
	$6'$	$1,3837$	$7^0 \ 36' \ 56,662$
	$5'$	$59,0529$	$7^0 \ 33' \ 58,813$

r_2	0 ⁰ 10'	2'',9075	12 ⁰ 53'	49'',000
	10'	3,3462	12 ⁰ 54'	23,338
	10'	4,5563	12 ⁰ 55'	58,064
	10'	6,1230	12 ⁰ 58'	0,728
	10'	7,5105	12 ⁰ 59'	49,314
	10'	10,1556	13 ⁰ 3'	16,366
	10'	12,4943	13 ⁰ 6'	19,381
r_3	0 ⁰ 10'	3'',3409	12 ⁰ 54'	22'',945
	10'	3,7986	12 ⁰ 54'	58,779
	10'	5,0630	12 ⁰ 56'	37,773
	10'	6,6791	12 ⁰ 58'	44,296
	10'	8,0608	13 ⁰ 0'	32,448
	10'	10,6842	13 ⁰ 3'	57,791
	10'	13,0000	13 ⁰ 6'	59,041
r_4	0 ⁰ 2'	17'',7748	2 ⁰ 52'	5'',449
	2'	17,3297	2 ⁰ 51'	31,532
	2'	16,0965	2 ⁰ 49'	57,793
	2'	14,5223	2 ⁰ 47'	58,060
	2'	13,1754	2 ⁰ 46'	15,933
	2'	10,6198	2 ⁰ 43'	2,058
	2'	8,3634	2 ⁰ 40'	10,953
i_4	0 ⁰ 3'	44'',1008	4 ⁰ 40'	6'',747
	3'	43,6351	4 ⁰ 39'	30,869
	3'	42,3362	4 ⁰ 37'	51,149
	3'	40,6855	4 ⁰ 35'	44,410
	3'	39,3086	4 ⁰ 33'	59,043
	3'	36,6775	4 ⁰ 30'	37,636
	3'	34,3251	4 ⁰ 27'	37,653
i_5	0 ⁰ 3'	20'',9902	4 ⁰ 19'	36'',382
	3'	21,4687	4 ⁰ 20'	13,403
	3'	22,7986	4 ⁰ 21'	56,258
	3'	24,4914	4 ⁰ 24'	7,044
	3'	25,9030	4 ⁰ 25'	55,987
	3'	28,6018	4 ⁰ 29'	24,211
	3'	31,0134	4 ⁰ 32'	30,220
r_5	0 ⁰ 2'	11'',8568	2 ⁰ 50'	13'',096
	2'	12,0846	2 ⁰ 50'	30,710
	2'	12,7236	2 ⁰ 51'	19,935

r_5	0^0	2' 13,5353	2^0 52' 22,422
		2' 14,1971	2^0 53' 13,301
		2' 15,4643	2^0 54' 50,650
		2' 16,6070	2^0 56' 18,388
r_6	0^0	5' 51'',8741	7^0 25' 30'',516
		5' 51,6639	7^0 25' 14,662
		5' 51,0691	7^0 24' 30,259
		5' 50,3168	7^0 23' 34,003
		5' 49,7037	7^0 22' 48,511
		5' 48,5314	7^0 21' 21,512
		5' 47,4720	7^0 20' 2,928
i_6	0^0	8' 56'',3661	11^0 21' 39'',165
		8' 56,3926	11^0 21' 41,547
		8' 56,4277	11^0 21' 45,832
		8' 56,4653	11^0 21' 50,654
		8' 56,5634	11^0 22' 0,311
		8' 56,7062	11^0 22' 15,350
		8' 56,7343	11^0 22' 21,194
Φ		1,0297987	1,0306947
		1,0297376	1,0306391
		1,0298814	1,0307702
		1,0301658	1,0310302
		1,0297606	1,0305612
		1,0294287	1,0301050
		1,0300759	1,0306429

mittlerer Werth von

Φ	1,0299412	1,0308068
--------	-----------	-----------

Die sphärische Abweichung ergibt sich bei diesem Linsensystem für die Strahlen $B, C, \dots H$ und im Mittel

- 0,0008960
- 0,0009015
- 0,0008888
- 0,0008644
- 0,0008006
- 0,0006773
- 0,0006670

mittlere sphärische Abweichung

- 0,0008656

Nach (18) betrug die mittlere sphärische Abweichung für das uncorrigirte Linsensystem $+ 0,0028558$, daher würde dieselbe durch die Correctionen (22) an der vierten und sechsten Fläche nach Ausweis von Tafel XXXIII um $0,0026335$, durch die Correctionen (24) an der ersten und fünften Fläche nach Ausweis von Tafel XXXIV um $0,0037214$ vermindert. Beabsichtigt man also, durch eine Correction der durch (16) bestimmten Halbmesser nicht allein den Fehler gegen die Achromasie, sondern auch den der sphärischen Aberration aufzuheben, so kann man zu diesem Zwecke die Gleichungen (26) in Anwendung bringen, wobei sich die Zahlen m und n bestimmen durch die Gleichungen

$$(27) \quad \begin{cases} m + n = 1 \\ 37214 m + 26335 n = 28558 \end{cases}$$

Es ergibt sich hieraus

$$(28) \quad \begin{cases} m = 0,2043387, & n = 0,7956613 \\ \delta a_1 = 0,00099501, & \delta a_4 = 0,00766868, & \delta a_5 = - 0,01557409 \\ \delta a_6 = 0,00275129 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= - 0,1863941, & a_2 &= - 0,2953946, & a_3 &= 0,2953946 \\ a_4 &= 0,3081673, & a_5 &= 2,0622489, & a_6 &= 0,2627608 \end{aligned}$$

Eine so construirte Linse wird so gut als möglich den Anforderungen sowohl hinsichtlich der Achromasie, als hinsichtlich der Aplanasie entsprechen. Man überzeugt sich davon noch durch eine, in derselben Weise wie vorher durchgeführte Rechnung über den Gang einzelner Lichtstrahlen.

Wenn man wieder die Oeffnung der Linse an der zweiten und dritten Linsenfläche 8° sein lässt, so erhält man

$$\begin{aligned} d_1 &= 0,001, & d_2 &= 0,0056292, & d_3 &= 0,0036457 \\ C_1 C_2 &= 0,4827887, & C_3 C_4 &= 0,5979327, \\ C_4 C_5 &= 2,3704162, & C_5 C_6 &= 2,3213640 \end{aligned}$$

Tafel XXXV.

i_1	$0^\circ 10'$	$6^\circ 0'$	$8^\circ 20'$	$12^\circ 27' 10''$
r_1	$0^\circ 6' 8'',6072$	$3^\circ 40' 54'',742$	$5^\circ 6' 29'',804$	$7^\circ 36' 45'',344$
	$6' 8,1700$	$3^\circ 40' 39,005$	$5^\circ 6' 7,943$	$7^\circ 36' 12,660$
	$6' 6,9641$	$3^\circ 39' 55,585$	$5^\circ 5' 7,627$	$7^\circ 34' 42,482$
	$6' 5,4027$	$3^\circ 38' 59,353$	$5^\circ 3' 49,510$	$7^\circ 32' 45,696$

r_1	0 ⁰	6' 4,0199	3 ⁰ 38' 9,574	5 ⁰ 2' 40,363	7 ⁰ 31' 2,323
		6' 1,3837	3 ⁰ 36' 34,645	5 ⁰ 0' 28,495	7 ⁰ 27' 45,198
		5' 59,0529	3 ⁰ 35' 10,732	4 ⁰ 58' 31,933	7 ⁰ 24' 50,970
r_2	0 ⁰	10' 10'',7773	6 ⁰ 7' 15'',534	8 ⁰ 31' 6'',991	12 ⁰ 47' 48'',761
		10' 11,2160	6 ⁰ 7' 31,414	8 ⁰ 31' 29,157	12 ⁰ 48' 22,386
		10' 12,4259	6 ⁰ 8' 15,229	8 ⁰ 32' 30,352	12 ⁰ 49' 55,143
		10' 13,9926	6 ⁰ 9' 11,974	8 ⁰ 33' 49,603	12 ⁰ 51' 55,283
		10' 15,3802	6 ⁰ 10' 2,207	8 ⁰ 34' 59,751	12 ⁰ 53' 41,620
		10' 18,0252	6 ⁰ 11' 37,998	8 ⁰ 37' 13,532	12 ⁰ 57' 4,398
		10' 20,3640	6 ⁰ 13' 2,675	8 ⁰ 39' 11,788	13 ⁰ 0' 3,633
r_3	0 ⁰	10' 11'',2162	6 ⁰ 7' 31'',428	8 ⁰ 31' 29'',186	12 ⁰ 48' 22'',428
		10' 11,6743	6 ⁰ 7' 48,017	8 ⁰ 31' 52,343	12 ⁰ 48' 57,538
		10' 12,9393	6 ⁰ 8' 33,826	8 ⁰ 32' 56,323	12 ⁰ 50' 34,536
		10' 14,5561	6 ⁰ 9' 32,374	8 ⁰ 34' 18,090	12 ⁰ 52' 38,489
		10' 15,9376	6 ⁰ 10' 22,399	8 ⁰ 35' 27,956	12 ⁰ 54' 24,406
		10' 18,5606	6 ⁰ 11' 57,386	8 ⁰ 37' 40,614	12 ⁰ 57' 45,481
		10' 20,8763	6 ⁰ 13' 21,234	8 ⁰ 39' 37,712	13 ⁰ 0' 42,960
r_4	0 ⁰	2' 16'',0618	1 ⁰ 21' 19'',085	1 ⁰ 52' 31'',790	2 ⁰ 46' 34'',780
		2' 15,6161	1 ⁰ 21' 3,007	1 ⁰ 52' 9,461	2 ⁰ 46' 1,497
		2' 14,3821	1 ⁰ 20' 18,610	1 ⁰ 51' 7,839	2 ⁰ 44' 29,506
		2' 12,8043	1 ⁰ 19' 21,883	1 ⁰ 49' 49,106	2 ⁰ 42' 32,066
		2' 11,4581	1 ⁰ 18' 33,446	1 ⁰ 48' 41,894	2 ⁰ 40' 51,908
		2' 8,8991	1 ⁰ 17' 1,471	1 ⁰ 46' 34,300	2 ⁰ 37' 41,809
		2' 6,6425	1 ⁰ 15' 40,285	1 ⁰ 44' 41,681	2 ⁰ 34' 54,050
i_4	0 ⁰	3' 41'',3156	2 ⁰ 12' 17'',441	3 ⁰ 3' 5'',558	4 ⁰ 31' 7'',810
		3' 40,8443	2 ⁰ 12' 0,425	3 ⁰ 2' 41,874	4 ⁰ 30' 32,345
		3' 39,5347	2 ⁰ 11' 13,196	3 ⁰ 1' 36,193	4 ⁰ 28' 53,775
		3' 37,8674	2 ⁰ 10' 13,137	3 ⁰ 0' 12,670	4 ⁰ 26' 48,560
		3' 36,4801	2 ⁰ 9' 23,110	2 ⁰ 59' 3,113	4 ⁰ 25' 4,410
		3' 33,8239	2 ⁰ 7' 47,444	2 ⁰ 56' 50,153	4 ⁰ 21' 45,376
		3' 31,4519	2 ⁰ 6' 21,933	2 ⁰ 54' 51,318	4 ⁰ 18' 47,528
i_5	0 ⁰	3' 21'',5535	2 ⁰ 1' 21'',868	2 ⁰ 49' 7'',314	4 ⁰ 14' 52'',869
		3' 22,0372	2 ⁰ 1' 39,311	2 ⁰ 49' 31,614	4 ⁰ 15' 29,409
		3' 23,3778	2 ⁰ 2' 27,727	2 ⁰ 50' 39,042	4 ⁰ 17' 10,923
		3' 25,0839	2 ⁰ 3' 29,312	2 ⁰ 52' 4,808	4 ⁰ 19' 19,967
		3' 26,5062	2 ⁰ 4' 20,660	2 ⁰ 53' 16,311	4 ⁰ 21' 7,492
		3' 29,2258	2 ⁰ 5' 58,832	2 ⁰ 55' 32,986	4 ⁰ 24' 32,954
		3' 31,6565	2 ⁰ 7' 26,555	2 ⁰ 57' 35,104	4 ⁰ 27' 36,502

r_5	0^0	2' 12",2261	1^0 19' 36",585	1^0 50' 55",450	2^0 47' 7",399
		2' 12,4583	1^0 19' 44,925	1^0 51' 7,061	2^0 47' 24,821
		2' 13,1022	1^0 20' 8,197	1^0 51' 39,448	2^0 48' 13,502
		2' 13,9218	1^0 20' 37,753	1^0 52' 20,578	2^0 49' 15,271
		2' 14,5903	1^0 21' 1,855	1^0 52' 54,117	2^0 50' 5,592
		2' 15,8692	1^0 21' 47,991	1^0 53' 58,291	2^0 51' 41,843
		2' 17,0222	1^0 22' 29,581	1^0 54' 56,137	2^0 53' 8,580

r_6	0^0	5' 55",2892	3^0 32' 59",407	4^0 55' 35",072	7^0 20' 48",786
		5' 55,0746	3^0 32' 51,690	4^0 55' 24,376	7^0 20' 33,045
		5' 54,4753	3^0 32' 30,164	4^0 54' 54,613	7^0 19' 48,962
		5' 53,7116	3^0 32' 2,846	4^0 54' 16,841	7^0 18' 53,154
		5' 53,0927	3^0 31' 40,668	4^0 53' 46,159	7^0 18' 8,002
		5' 51,9042	3^0 30' 58,185	4^0 52' 47,475	7^0 16' 41,584
		5' 50,8345	3^0 30' 19,807	4^0 51' 54,496	7^0 15' 23,651

i_5	0^0	9' 1",5716	5^0 24' 56",359	7^0 31' 18",193	11^0 14' 24",866
		9' 1,5954	5^0 24' 57,223	7^0 31' 19,438	11^0 14' 27,130
		9' 1,6319	5^0 24' 58,643	7^0 31' 21,643	11^0 14' 31,130
		9' 1,6641	5^0 25' 0,091	7^0 31' 23,939	11^0 14' 35,656
		9' 1,7636	5^0 25' 3,843	7^0 31' 29,371	11^0 14' 44,990
		9' 1,9003	5^0 25' 9,279	7^0 31' 37,478	11^0 14' 59,325
		9' 1,9285	5^0 25' 10,532	7^0 31' 39,755	11^0 15' 4,811

Φ	1,0423977	1,0424164	1,0424301	1,0424380
	1,0423619	1,0423739	1,0423882	1,0423856
	1,0424981	1,0425210	1,0425303	1,0425261
	1,0427997	1,0428083	1,0428131	1,0427939
	1,0423897	1,0423874	1,0423846	1,0423268
	1,0420705	1,0420384	1,0420103	1,0418798
	1,0427037	1,0426694	1,0426210	1,0424293

mittlerer Werth von Φ

1,0425657	1,0425788	1,0425845	1,0425660
-----------	-----------	-----------	-----------

Die sphärische Abweichung zwischen den Central- und Randstrahlen beträgt bei diesem Linsensystem für die Strahlen $B, C, \dots H$ und im Mittel

$$\begin{aligned}
 & - 0,0000403 \\
 & - 0,0000237 \\
 & - 0,0000280 \\
 & + 0,0000058
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 0,0000629 \\ &+ 0,0001907 \\ &+ 0,0002744 \end{aligned}$$

mittlere sphärische Abweichung

$$- 0,0000003$$

Nicht ohne einige Genugthuung mag man diese letzten Reihen von Zahlen überblicken, schon was das Rechenwerk an sich betrifft, wiewohl diess zu loben uns allerdings weniger ziemen will, namentlich aber was das sachlich gewonnene Resultat anlangt. Denn was das erstere betrifft, so war der Zweck der Gleichung (27), die mittlere sphärische Abweichung, d. h. die Differenz der mittleren Brennweite der Centralstrahlen und der Randstrahlen auf Null zu bringen, und in der That ist dies bis auf drei Einheiten der achten geltenden Stelle gelungen, was gewiss nicht gering anzuschlagen ist, wenn man erwägt, dass jeder Fehler, oder auch nur jede geringere Sorgfalt, die man sich in den Tafeln XXXI bis XXXIV hat zu Schulden kommen lassen, sich nothwendig in den Zahlen der Tafel XXXV rächt, weil die drei Constanten der Gleichung (27) aus jenen Tafeln geschöpft sind. Was aber das sachlich gewonnene Resultat anlangt, so beträgt die grösste Differenz der Brennweiten der verschiedenfarbigen Centralstrahlen nur 0,0007292, die der Randstrahlen 0,0009141, die grösste Abweichung, wenn man chromatische und sphärische Abweichung zusammennimmt, nur 0,0009199, nämlich zwischen dem Centralstrahl E und dem Randstrahl G . Nun hatte man aber schon durch die nach Gleichungen (7) bis (9) angestellte Betrachtung vorausgesehen, dass allein im Gliede φ_3 eine Abweichung der Strahlen verschiedener Wellenlänge unter sich um 0,0007147 unvermeidlich sei, wenn man die algebraischen Formeln für die Brechungsexponenten zur Berechnung der Linse in Anwendung bringt, obschon die durch diese Formeln gegebenen Werthe der einzelnen Brechungsexponenten von den unmittelbar beobachteten Exponenten um nicht mehr abweichen, als je zwei Beobachtungen derselben Exponenten unter sich, dass also jene chromatische Abweichung im Werthe von 0,0007147 sozusagen nur eine scheinbare sei. Sie bildet aber bei weitem den grössten Theil der überhaupt gebliebenen Differenz der Werthe von Φ , welche

nur 0,0009199 ist; folglich kann man behaupten, dass die dargestellte Linse mit der äussersten zulässigen Genauigkeit die Vereinigung aller verschiedenfarbigen Central- und Randstrahlen in einen Punkt bewirkt. Hierzu kommt aber noch, dass sämtliche Werthe von Φ , welche dem Einfallswinkel 6° an der Vorderfläche zugehören, sich innerhalb derselben Grenzen befinden, welche für die Werthe von Φ bei den Einfallswinkeln $10'$ und $12^\circ 27' 10''$ bestehen, mit der einzigen höchst unbedeutenden Ausnahme, dass für den Strahl E die Länge Φ um 0,0000086 grösser ist, als beim Einfallswinkel $10'$; also auch alle unter jenem mittleren Einfallswinkel an der Vorderfläche auffallenden Strahlen gehen nach ihrer Brechung mit grosser Schärfe durch den Punkt, welcher der Vereinigungspunkt der Central- und Randstrahlen ist; und diess war der Zweck der Gleichungen (10) und (11), deren genaue Wurzelwerthe (16) durch die Correctionen (28) nur sehr wenig alterirt worden sind. Der Mittelwerth von Φ für die unter 6° auffallenden Strahlen ist 1,0425788 und differirt also von den zu den Einfallswinkeln $10'$ und $12^\circ 27' 10''$ gehörenden Mittelwerthen nur um 0,0000131 oder 0,0000128, eine Differenz, die noch weit unter der oben sogenannten scheinbaren chromatischen Abweichung bleibt. Da Gauss gezeigt hat, dass das Maximum der Abweichung den Strahlen zukommt, welche in $\frac{2}{3}$ der Oeffnung von der Mitte aus gerechnet auffallen, vorausgesetzt, dass die Centralstrahlen und die Randstrahlen nach der Brechung in einen Punkt der Axe zusammengeführt werden, so haben wir auch für den Einfallswinkel $8^\circ 20'$ den Gang der Lichtstrahlen berechnet. Man sieht, dass der mittlere Werth von Φ auch für diesen Strahl kaum merklich, nämlich nur um 0,0000188 von denjenigen mittleren Φ verschieden ist, welche den Centralstrahlen und Randstrahlen zukommen. Nimmt man für den centralen Theil der Linse, der sich vom Mittelpunkt bis 6° erstreckt, als mittleren Werth von Φ das arithmetische Mittel von 1,0425657 und 1,0425788, d. i. 0,0425722, ebenso für die von 6° bis $12^\circ 27' 10''$ sich erstreckende Ringfläche als mittleren Werth von Φ das arithmetische Mittel von 1,0425788 und 1,0425660, d. i. 1,0425724, folglich als mittleren Werth von Φ überhaupt 1,0425723 und berechnet, indem man diess

gleich der Einheit setzt, die Werthe von Φ , welche den verschiedenfarbigen Strahlen bei verschiedenen Einfallswinkeln zukommen, so erhält man in etwas übersichtlicherer Ausdrucksweise und auf sechs Decimalstellen ausgerechnet

Einfallswinkel	0° 10'	6°	12° 27' 10"
Φ für $B =$	0,999832	0,999850	0,999871
C	0,999798	0,999810	0,999821
D	0,999929	0,999951	0,999956
E	1,000218	1,000226	1,000213
F	0,999825	0,999823	0,999765
G	0,999519	0,999488	0,999336
H	1,000126	1,000093	0,999863
im Mittel	0,999994	1,000006	0,999994

7. Einige nachträgliche Bemerkungen zu den Paragraphen 5. und 6.

1) Der wesentliche Unterschied zwischen unsrer Methode der Berechnung einer Linse und der bisher angewendeten beruht in dem analytischen Gebrauche einer allgemeinen Formel, wie $n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-4}$, für die Brechungsexponenten, durch welchen thatsächlich die Strahlen aller Brechbarkeiten zugleich bei der Feststellung ihres Ganges in Rechnung gezogen werden, während bisher die Rechnung meistens auf den abgeleiteten Begriffen der mittleren Brechbarkeit und des mittleren Zerstreuungsvermögens fusste. Wenig Worte werden genügen, um diesen Gegensatz der Behandlung an dem Beispiele einer Doppellinse in's Licht zu stellen.

Soll aus zwei Glassorten eine annähernd achromatische Linse hergestellt werden, so ist die Berechnung bisher auf das Princip gegründet, dass das Verhältniss der Brennweiten ungefähr dem der Farbenzerstreuung der beiden Glasarten gleich sei. (Vergl. z. B. Fraunhofer, Bestimmung des Brechungsvermögens etc. p. 210.) Denn in der That bei einer Doppellinse ist mit Weglassung der Glieder kleiner Grössen, wie aus Formel (2) des § 4. hervorgeht, $\frac{1}{Q_2 F_2} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{b}$, wo $f_1 = \frac{a_1 a_2}{(n_1 - 1)(a_1 + a_2)}$ die Brennweite

der ersten, $f_2 = \frac{a_3 a_4}{(n_2 - 1)(a_3 + a_4)}$ die Brennweite der zweiten Linse für mittlere Werthe von n_1 und n_2 heisse. Angenommen nun, es bedeuten $n_1^{(b)}$, $n_2^{(b)}$, $f_1^{(b)}$, $f_2^{(b)}$; $\varphi_2^{(b)}$ die betreffenden Grössen für einen blauen Strahl, und $n_1^{(r)}$, $n_2^{(r)}$, $f_1^{(r)}$, $f_2^{(r)}$, $\varphi_2^{(r)}$ für einen rothen Strahl, so wird $\frac{1}{\varphi_2^{(b)}} = \frac{1}{\varphi_2^{(r)}}$, wenn

$$\frac{(n_1^{(b)} - n_1^{(r)})(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} + \frac{(n_2^{(b)} - n_2^{(r)})(a_3 + a_4)}{a_3 a_4} = 0,$$

d. i. wenn

$$\frac{n_1^{(b)} - n_1^{(r)}}{n_1 - 1} : \frac{n_2^{(b)} - n_2^{(r)}}{n_2 - 1} = f_1 : -f_2.$$

Nennt man nun den Quotienten $\frac{n_1^{(b)} - n_1^{(r)}}{n_1 - 1}$ die Grösse der Farbenzerstreuung in der ersten Glasart, und dem analog in der zweiten, so ist hiernach die Bedingung für die Achromasie einer Doppellinse, dass die Brennweiten beider Linsen sich wie die Grössen der Farbenzerstreuung zu verhalten haben und ihren Vorzeichen nach entgegengesetzt sind, und so ist das oben genannte Princip zu verstehen. Wenn dabei die Einschränkung „ungefähr“ gebraucht worden ist, so bezieht sich diese nicht allein darauf, dass die kleinen Grössen der Formel (2) vernachlässigt wurden, d. h. dass der Satz nur für die Centralstrahlen unendlich dünner sich berührender Linsen richtig ist und in Wirklichkeit für physische Linsen von einiger Dicke daher Correctionen erforderlich sind, auch nicht darauf, dass es, wie doch die Nenner jener beiden Quotienten voraussetzen, nicht eigentlich eine Brennweite für jede Linse giebt, sondern namentlich darauf, dass es nicht ein Verhältniss der Grössen der Farbenzerstreuung giebt. Nennt man mit Fraunhofer B_n, C_n, D_n, \dots die Brechungsexponenten in der ersten, $B_{n'}, C_{n'}, D_{n'}, \dots$ diejenigen in der zweiten Glasart für die Spectrallinien B, C, D, \dots so ist $\frac{C_n - B_n}{C_{n'} - B_{n'}}$ nicht $= \frac{D_n - C_n}{D_{n'} - C_{n'}}$, nicht $= \dots$; es kommt also darauf an, für diese Quotienten, die erfahrungsmässig beträchtlich von einander verschieden sind, einen mittleren Werth zu suchen, wenn dennoch obige Bedingungsgleichung soll angewendet werden. Diesen mittleren Werth bezeichnet

Fraunhofer p. 215 mit $1:x$ und nennt ihn das Verhältniss der Zerstreuung, so dass unter diesem Ausdrucke etwas andres verstanden wird, als das Verhältniss der vorhin definirten Grössen der Farbenzerstreuung; es ist nicht etwa $1:x=f_1:-f_2$, sondern vielmehr $1:x=(n_1-1)f_1:-(n_2-1)f_2=\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}$
 $:\frac{a_3 a_4}{a_3+a_4}$. Bei der Bestimmung dieses mittleren Quotienten ist aber wesentlich auf die verschiedenen Intensitäten Rücksicht zu nehmen, mit welchen die verschiedenen Theile des Spectrums auf das menschliche Auge wirken, und welche durch die von uns schon gebrauchten Verhältnisszahlen 32, 94, 640, 480, 170, 31, 6 ausgedrückt sind. Diess geschieht in folgender Weise: Fraunhofer misst an dem durch ein gewisses Prisma, nämlich durch ein Prisma aus Flintglas No. 13 von dem brechenden Winkel $26^\circ 24' 30''$, gebildeten Spectrum die Breiten der verschiedenen Theile desselben von der Linie B bis C , von C bis D , ... nimmt diese Bogen als Abschnitte auf der Abscissenaxe, die zu B , C , D , ... gehörenden Lichtwirkungsintensitäten als Ordinaten einer gewissen Curve, und berechnet die Flächenräume, welche durch je zwei auf einander folgende Ordinaten und die zwischenliegenden Abschnitte der Abscissenaxe und der Curve begrenzt werden, und welche er kurz die Lichtmengen in diesem Raume nennt und durch β , γ , ... bezeichnet; andererseits mögen für zwei beliebige Glasarten die Verhältnisse der Zerstreuung für die auf einander folgenden Abschnitte der Spectra $\frac{C_{n'}-B_{n'}}{C_n-B_n}=b$, $\frac{D_{n'}-C_{n'}}{D_n-C_n}=c^*)$, ... sein, so ist $x=\frac{b\beta+c\gamma+\dots}{\beta+\gamma+\dots}$. Man wird nicht verkennen, dass diese Methode der Bestimmung von x wenigstens insofern aufrechtbar ist, als die Breiten der einzelnen Theile des Spectrums von Flintglas No. 13 nur in einer entfernten Beziehung zu den Lichtmengen der einzelnen Abschnitte der Spectra von irgend zwei anderen

*) $\frac{D_{n'}-B_{n'}}{D_n-B_n}$ p. 215 Z. 5 v. u. ist ein Irrthum für $\frac{D_{n'}-C_{n'}}{D_n-C_n}$, welcher auch in die französische Uebersetzung, Schumacher, astronom. Abh. 1823, 2, p. 38 übergegangen ist.

Glasarten stehen. Fraunhofer findet auf diese Weise für Flintglas No. 30 und Crownglas No. 13 jenes Verhältniss, wie 1 : 2,012. Setzt man dann unter Annahme mittlerer Werthe von n_1 und n_2 (man nimmt gewöhnlich den Brechungsindex der leuchtendsten Stelle im Spectrum hierzu) das Verhältniss der Brennweiten $f_1 : -f_2' = 1 : \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} x$ und etwa $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1$, so bestimmen sich die Werthe von f_1 und f_2 , welche sich sodann in die Formel (2) des § 4. einsetzen lassen, um die übrigen Bedingungen für das Verschwinden der sphärischen Abweichung festzustellen.

Nach unsrer Methode gestaltet sich die Lösung der Aufgabe, aus zwei Glasarten annähernd eine achromatische Linse darzustellen, folgendermassen: Es ist

$$\varphi_2 = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b}{(n_1 - 1)(a_1 + a_2) a_3 a_4 b + (n_2 - 1)(a_3 + a_4) a_1 a_2 b - a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Man muss nun voraussetzen, dass annähernd die Brechungsexponenten des Lichts in beiden Glasarten durch die binomischen Ausdrücke $n_1 = \alpha_1 + \beta_1 l^{-k}$ und $n_2 = \alpha_2 + \beta_2 l^{-k}$ gegeben seien; dann wird φ_2 von l unabhängig, wenn

$$\beta_1 \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \beta_2 \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} = 0;$$

es ist also

$$\beta_2 : \beta_1 = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} : - \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4}$$

und das Verhältniss der beiden Coefficienten von l^{-k} tritt somit an die Stelle des von Fraunhofer gebrauchten Zerstreuungsverhältnisses 1 : x . Wir wissen, dass die Lichtbrechung sich nicht mit hinreichender Genauigkeit durch die zweigliedrige Function $\alpha + \beta l^{-k}$ ausdrücken lässt; will man gleichwohl sich derselben bedienen, so hat man, um die daraus entspringende Undeutlichkeit der Bilder möglichst wenig fühlbar zu machen, der Intensität der Lichtwirkung auf unser Auge insofern Rechnung zu tragen, dass die aus den Formeln durch Rechnung hervorgehenden Einzelwerthe der Brechungsexponenten für die verschiedenen Spectrallinien sich in dem Masse den beobachteten besser anschliessen, als diese Linien in einem intensiver wirkenden Theile des Spectrums sich befinden. Nun ist aus der Lehre von der Methode

der kleinsten Quadrate bekannt, dass bei gleicher Zuverlässigkeit der Beobachtung die Genauigkeit wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen wächst; man hat also zu dem genannten Zwecke bei Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe von α und β die durch die Beobachtung gefundenen Brechungsexponenten der Linien B, C, \dots mit den Quadraten der Intensitätscoefficienten als Gewichten p zu versehen. Wählt man übrigens $k = \frac{7}{3}$, so findet sich, um bei Fraunhofer's Beispiel zu bleiben, für

Flintglas No. 30

$$n = 1,60782325 + 0,006637553 \, l^{-\frac{7}{3}}$$

woraus durch Rechnung für die Wellenlängen der Linie B, C, \dots sich die nachfolgenden Exponenten n verglichen mit den beobachteten N ergeben

	B	C	D	E
$n =$	1,623734	1,625525	1,630581	1,637361
$N =$	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356
$\Delta = n - N =$	$+ 0,000164$	$+ 0,000048$	$- 0,000004$	$+ 0,000005$
	F	G	H	
$n =$	1,643477	1,655115	1,665069	
$N =$	1,643466	1,655406	1,666072	
$\Delta = n - N =$	$+ 0,000011$	$- 0,000291$	$- 0,001003$	
$\Sigma p \Delta : \Sigma p = \frac{107805}{679757} = 0,000000$				

Crown Glas No. 13

$$n = 1,51664667 + 0,003305695 \, l^{-\frac{7}{3}}$$

	B	C	D	E
$n =$	1,524571	1,525462	1,527981	1,531357
$N =$	1,524321	1,525299	1,527982	1,531372
$\Delta = n - N =$	$+ 0,000259$	$+ 0,000163$	$- 0,000001$	$- 0,000015$
	F	G	H	
$n =$	1,534403	1,540199	1,545157	
$N =$	1,534337	1,539908	1,544684	
$\Delta = n - N =$	$+ 0,000066$	$+ 0,000291$	$+ 0,000473$	
$\Sigma p \Delta : \Sigma p = \frac{43963}{679757} = 0,000000$				

Hieraus folgt $\beta_2 : \beta_1 = 1 : 2,007915$, ein Verhältniss, welches

nur wenig verschieden ist von dem Fraunhofer's 1:2,012. Dass Fraunhofer auf Grund von Proben als ein noch günstigeres Verhältniss für jene beiden Glasarten 1:1,98 empfiehlt, welchem überdiess das unsrige näher steht, berührt nicht die mathematische Methode, sondern vielleicht vielmehr die Frage, ob die von Fraunhofer gesetzten und von uns recipirten Intensitätscoefficienten die zweckmässigsten sind. Auch ist es sehr möglich, dass bei einer aus jenen beiden Glasarten zusammengesetzten Doppellinse, an welcher die Correctionen der Halbmesser wegen der Dicke der Gläser angebracht worden sind, das Verhältniss $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} : - \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4}$ durch diese Correctionen von 1:2,0079 auf 1:1,98 abgemindert erscheint. Hat man nun

$$\beta_2 : \beta_1 = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} : - \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} = 1 : 2,007915,$$

so ergibt sich weiterhin, wenn für $b = \infty$, $\varphi_2 = 1$ sein soll,

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{-\beta_2}{\beta_1(\alpha_2 - 1) - \beta_2(\alpha_1 - 1)}$$

und

$$\frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} = \frac{\beta_1}{\beta_1(\alpha_2 - 1) - \beta_2(\alpha_1 - 1)}$$

also die Flintglaslinse muss eine Zerstreuungslinse sein, deren Krümmungshalbmesser a_1 und a_2 der Bedingung

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = -2,327969$$

und die Crownglaslinse eine Sammellinse, deren Krümmungshalbmesser a_3 und a_4 der Bedingung

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 4,674362$$

genügen. Man kann nun entweder je nach der gewünschten Qualität der Linse in die von y abhängigen Glieder der Formel (2) des § 4. einführen

$$f_1 = \frac{a_1 a_2}{(\alpha_1 - 1 + \beta_1 l^{-\frac{7}{3}})(a_1 + a_2)},$$

$$f_2 = \frac{a_3 a_4}{(\alpha_2 - 1 + \beta_2 l^{-\frac{7}{3}})(a_3 + a_4)},$$

sowie auch $n_1 = \alpha_1 + \beta_1 l^{-\frac{7}{3}}$, $n_2 = \alpha_2 + \beta_2 l^{-\frac{7}{3}}$, die von $\frac{1}{l}$ abhängigen Glieder aber wegen unendlich gross gedachten b

unter allen Umständen als verschwindend betrachten, und sodann einzeln die l nicht enthaltenden Glieder, und die l enthaltenden Glieder $= 0$ setzen; oder man kann, indem man auch endliche jedoch hinreichend grosse Werthe von b statuirt, in die von y abhängigen Glieder für die einzelnen n mittlere von l unabhängige Werthe einsetzen und einzeln die $\frac{1}{b}$ nicht enthaltenden Glieder, und die $\frac{1}{b}$ enthaltenden Glieder $= 0$ setzen, dagegen die $\frac{1}{b^2}$ enthaltenden unter allen Umständen vernachlässigen. Auf jede von beiden Weisen gewinnt man die noch erforderlichen zwei Bedingungsgleichungen für die vier Krümmungshalbmesser.

Dass eine Doppellinse nicht vollkommen achromatisch sein kann, dass aber der analytische Gebrauch der trinomischen Formeln $n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-2}$ eine sichere Methode der Berechnung einer achromatischen dreifachen Linse gestattet, und wie ferner diese selben Formeln auch für die wegen der Dicke der Linse anzubringenden Correctionen bequem zu verwenden waren, darf nicht hier nochmals ausgeführt werden. Es kam uns gegenwärtig nur darauf an, an dem Beispiele einer Doppellinse die Verschiedenheit der Behandlung der Aufgabe durch unsre Methode gegenüber der zeither üblichen zu zeigen und nachzuweisen, wie weit die Uebereinstimmung der Resultate reicht.

Die Idee, die Brechungsexponenten der Gläser einer Function einer veränderlichen Grösse gleich zu setzen und so die Bedingungsgleichungen für die Krümmungshalbmesser der Linse zu entwickeln, findet sich allerdings auch bei Herschel in seiner oben citirten Abhandlung. Phil. Trans. 1821, I. Er setzt nämlich p. 250 den Brechungsindex

$$= \mu + (\mu - 1)(pc + qc^2 + rc^3 + \dots),$$

wo μ den Brechungsindex der leuchtendsten Stelle im Spectrum, p den herkömmlich als Zerstreuungsvermögen bezeichneten Werth, q, r, \dots schnell abnehmende numerische Coefficienten, und c den Unterschied zwischen der Wellenlänge eines Strahles von veränderlicher Stellung im Spectrum und der Wellenlänge des leuchtendsten Strahles bedeutet; wenigstens sind wohl die Worte „the length of its fits of easy

transmission and reflexion in vacuo“ nicht anders als für Wellenlänge zu verstehen; dabei soll als Einheit von c der ganze Unterschied der Wellenlänge des äussersten Roth und des äussersten Violett gelten und c positiv oder negativ sein, jenachdem der Strahl von der leuchtendsten Stelle aus nach dem rothen oder nach dem violetten Ende liegt. Allein in der Folge beschränkt sich Herschel auf Doppellinsen allein, wobei natürlich q, r, \dots als verschwindend angesehen werden müssen; und so tritt obige Gleichung nur als das analytische Mittel der von allgemeinerem Gesichtspunkte ausgehenden Ableitung der bis dahin bereits üblichen Berechnung der Linse auf, welche auf die beiden Begriffe mittlerer Brechungsindex und mittleres Zerstreuungsvermögen recurriert.

Bei unsrer Methode, aus den, durch die Formeln

$$n = \alpha + \beta l^{-1} + \gamma l^{-2}$$

ausgedrückten Brechungsexponenten die Krümmungshalbmesser einer dreifachen Objectivlinse und auch die durch den Einfluss der Dicke der Gläser nothwendig werdenden Correctionen dieser Halbmesser abzuleiten, ist es allerdings unumgänglich, für je drei specielle Glasarten die Lösung der Aufgabe durch eine besondere, nicht weniger ausgedehnte Rechnung zu bewirken, wie die in §. 6. enthaltene. Eine Tabelle zu construiren, wie sie Herschel am Schluss seiner Abhandlung entworfen hat und wie sie von Barlow, Edinburgh phil. Journ. Apr. 1826 (Vergl. Prechtl, praktische Dioptrik p. 79) stark erweitert worden ist, aus der man für die Brechungsindices je zweier gegebner Gläser und ihr Zerstreuungsverhältniss sofort die Krümmungshalbmesser der Flächen entnehmen könnte, dürfte unausführbar sein.

2. Die Achromasie und Bestimmung der Brennweite des Linsensystems beansprucht bei einer dreifachen Linse, wie wir gesehen haben, drei Bedingungsgleichungen; es waren diess die Gleichungen (4), (5), (6) des §. 5., oder in unserem besondern numerischen Beispiele (7), (8), (9) des §. 6. Von den drei noch verfügbaren Bedingungsgleichungen haben wir zwei dazu verwendet, dass von den Gliedern der Formel (3) in §. 4., welche mit y^2 behaftet sind, sowohl diejenigen für sich verschwinden, welche von der Wellenlänge unabhängig sind, als

auch diejenigen für sich, welche l enthalten, indem wir hierbei die zweigliedrige, mit hinreichender Schärfe die Exponenten wiedergebende Function $n = \alpha + \beta l^{-\frac{7}{3}}$ voraussetzten. Dem zufolge haben alle Strahlen, welche nicht im Centrum der Vorderfläche auffallen, mögen sie dem Centrum näher oder ferner von ihm einfallen, und mögen sie weniger oder mehr brechbar sein, mit den Centralstrahlen gleiche Brennweite. Wir haben hierdurch dasselbe erreicht, was Gauss „über die achromatischen Doppelobjective etc.“ Zeitschr. f. Astron. von v. Lindenau u. Bohnenberger IV, p. 345 einer Linse abverlangt, und zwar insofern vollständiger, als Gauss seine Rechnung lediglich darauf gerichtet hat, dass für zwei gewisse Farben, nämlich roth und violett, völlige Gleichheit der Vereinigungsweite sowohl der Randstrahlen als der Centralstrahlen eintrete, während durch unsere Methode der Anwendung allgemeiner Formeln für die Brechungsexponenten sowohl bei der vorläufigen Bestimmung der Halbmesser als auch insbesondere bei den nachträglichen Correctionen der Flächen alle Strahlen in Rechnung gezogen wurden. Da Gauss weder die besondere Zahlenrechnung, noch auch die Art und Weise, nach welcher er dieselbe disponirt, sondern nur den leitenden Gedanken, die Farbenzerstreuung sowohl für die Centralstrahlen als für die Randstrahlen wegschaffen zu wollen, und ausserdem die numerischen Resultate für ein berechnetes Beispiel mitgetheilt hat, so ist es nicht ohne Interesse, wenigstens diese Resultate zu controliren, zumal da an der Richtigkeit dieser Zahlen gezweifelt worden ist. Gauss geht bei seinem Beispiele von denselben Daten aus, welche Bohnenberger in einer früher erschienenen Abhandlung Zeitschr. für Astron. von v. Lindenau u. Bohnenberger I p. 277 ff. zu Grunde gelegt hatte, nämlich

Brechungsexponent der violetten Strahlen für Crown Glas	1,525976
„ „ „ rothen „ „ „	1,504348
„ „ „ violetten „ „ Flintglas	1,62173
„ „ „ rothen „ „ „	1,58181
Dicke der Crown Glaslinse	200
„ „ Flintglaslinse	80
Abstand der zweiten Linse von der ersten	50

Er findet die vier Krümmungshalbmesser

$$\begin{aligned}
 &+ 3415,287 \\
 &- 10133,007 \\
 &+ 4207,421 \\
 &- 2807,320
 \end{aligned}$$

und behauptet, dass dann die parallel mit der Axe auffallenden rothen und violetten Strahlen, sowohl die, welche unendlich nahe bei der Axe, als die, welche in der Entfernung 1083,687 (d. i. in einem Winkelabstande $18^0 30'$) auffallen, sich alle in einem Punkte der Axe vereinigen, dessen Entfernung von der letzten Fläche = 28293,3 sei. Wir finden bei einer der obigen analogen Rechnung und Bezeichnungsweise, indem wir immer zuerst die dem rothen, sodann die dem violetten Strahle zukommenden Werthe anführen:

	$0^0 10'$	$13^0 0'$	$18^0 30'$
i_1	$0^0 6' 38'',84372$	$8^0 35' 59'',697$	$12^0 10' 35'',633$
r_1	$0^0 6' 33'',19085$	$8^0 28' 37,652$	$12^0 0' 5'',027$
r_2	$0^0 0' 2'',89825$	$0^0 6' 47'',722$	$0^0 14' 5'',871$
	$0^0 0' 8'',66320$	$0^0 14' 15,928$	$0^0 24' 41'',528$
i_2	$0^0 0' 4'',36020$	$0^0 10' 13'',355$	$0^0 21' 12'',489$
	$0^0 0' 13'',21969$	$0^0 21' 46,130$	$0^0 37' 40'',802$
i_3	$0^0 4' 32'',45071$	$5^0 49' 4'',051$	$8^0 9' 11'',958$
	$0^0 4' 23'',32991$	$5^0 37' 7,872$	$7^0 52' 5'',876$
r_3	$0^0 2' 52'',24003$	$3^0 40' 26'',883$	$5^0 8' 38'',232$
	$0^0 2' 42'',37638$	$3^0 27' 40,616$	$4^0 50' 32'',353$
r_4	$0^0 6' 40'',54419$	$8^0 37' 56'',963$	$12^0 12' 56'',167$
	$0^0 6' 30'',22206$	$8^0 24' 25,866$	$11^0 53' 32'',868$
i_4	$0^0 10' 33'',58521$	$13^0 44' 4'',247$	$19^0 33' 14'',745$
	$0^0 10' 32'',83516$	$13^0 42' 57,373$	$19^0 31' 25'',761$
Vereinigungs-			
weite	28294,60	28289,26	28293,39
	28294,42	28290,97	28293,18

Man sieht hieraus, dass die Vereinigungsweite der Randstrahlen in der That, wie Gauss behauptet, 28293,3, dass ferner der ausgesprochene Zweck der Linse, die Vereinigungsweite der Centralstrahlen und der Randstrahlen für rothes und vio-

lettes Licht gleich zu machen, sehr nahe, und zwar bis auf 142 Einheiten in der siebenten geltenden Stelle, oder, wenn man die ganze Grösse der Vereinigungsweite $= 1$ setzt, bis auf 0,000050 erreicht ist, dass sonach Santini mit Unrecht einen Irrthum in der Angabe des zweiten Krümmungshalbmessers vermuthet. Derselbe findet nämlich *Teorica degli stromenti ottici* I p. 182 die vier Krümmungshalbmesser

+ 0,142615, — 0,579839, + 0,179521 und — 0,118555, welche sich wie 1 : — 4,0658 : 1,2588 : — 0,8312 verhalten, während sich die von Gauss berechneten wie

$$1 : - 2,9670 : 1,2319 : - 0,8220$$

verhalten. Santini glaubt daher, dass ausser dem am Schluss des Bandes der Bohnenberger'schen Zeitschrift corrigirten Druckfehler im vierten Halbmesser sich auch ein nicht corrigirter im zweiten Halbmesser eingeschlichen habe und geht soweit zu behaupten, dass die von Gauss angegebenen Halbmesser nicht zu der behaupteten Brennweite 28293 führten. Allein die Unterschiede in obigen Krümmungshalbmessern erklären sich einfach daraus, dass Santini bei seiner Berechnung nicht auf die Dicken der Linsen und ihren Abstand Rücksicht nimmt, sondern nur die übrigen Voraussetzungen der Aufgabe zu Grunde legt.

Auch die Forderung der Aplanasie wird von Gauss' Linse nahe befriedigt, denn die mittlere Vereinigungsweite beim Einfallswinkel von 13^0 unterscheidet sich von der der Randstrahlen und Centralstrahlen um 3,78 oder die ganze Grösse gleich 1 gesetzt um 0,000133. Bei unserer Linse §. 6. betrug der Unterschied zwischen der mittleren Vereinigungsweite der Centralstrahlen und Randstrahlen 0,000000 und der Unterschied zwischen der Vereinigungsweite bei dem $\frac{2}{3}$ -Einfallswinkel und derjenigen der Rand- oder Centralstrahlen 0,000018. Im übrigen ist es aber nicht thunlich, die Güte der Gauss'schen Doppellinse darauf hin zu prüfen, wie wir es §. 6. bei unserer Linse gethan haben, ob auch den übrigen Strahlen, ausser den rothen und violetten, die gleiche Vereinigungsweite zukomme, da die Angaben über die Brechungsexponenten dieser übrigen Strahlen in beiden Glasarten fehlen. Denn die von Bohnenberger a. a. O. p. 280 gegebenen Zahlen

1,515162 und 1,60177 für die Brechungsexponenten der mittleren Strahlen in jenem Crown Glas und Flintglas sind offenbar nur die berechneten arithmetischen Mittel derjenigen für violette und rothe Strahlen, nicht aber die Brechungsexponenten eines factisch existirenden Strahles, der in der einen Glasart diesen und in der andern jenen Exponenten hätte*). Es lässt sich aber mit Gewissheit voraussetzen, dass eine auf zwei Farben allein gestellte Rechnung nicht zu Ergebnissen führt, welche auch für die übrigen farbigen Strahlen eine genügende Gleichheit der Vereinigungsweite bieten. Damit soll selbstverständlich nicht eine tadelnde Kritik des Gauss'schen Princip's oder seiner Rechnung ausgesprochen werden; denn Gauss hat im vorliegenden Falle nichts weiter gewollt, als an einem Beispiele den Nachweis liefern, dass es möglich sei, die Gleichheit der Vereinigungsweiten für zwei verschiedene Farben sowohl für die Centralstrahlen als die Randstrahlen herzustellen. Hätte er zum Ausgangspunkt der Rechnung zwei Glasarten genommen, von denen auch die Brechungsexponenten der übrigen Strahlen bekannt waren, so würde er wohl auch eine mittlere Gleichheit der Vereinigungsweiten aller Strahlen zum Ziele der Rechnung gemacht haben. Nach einer Notiz in Göttinger Nachr. 1861, p. 75 ff. hat 40 Jahre später Steinheil ein Objectiv nach Gauss'schen Vorschriften unter Anbringung einiger Modificationen mit glücklichstem Erfolge ausgeführt. Die Modificationen beziehen sich abgesehen von einer neuen Art der Montirung darauf, dass die Gleichmachung der Vereinigungsweiten nicht für die Grenzwerte der Brechbarkeit berechnet worden ist, sondern wie es scheint für zwei Strahlen mittlerer Brechbarkeit. Auch aus einem Berichte Steinheil's Münch. Gel. Anz. XLVI

*) Nur wenn in aller Strenge die Brechungsexponenten der binomischen Function $\alpha + \beta l^{-k}$ folgten, würde es allgemein richtig sein, dass einem Strahl zugleich in beiden Glasarten das arithmetische Mittel zweier beobachteter Brechungsexponenten als Brechungsexponent zukäme. Wenn daher Bohnenberger a. a. O. p. 282 für ein aus jenen beiden Glasarten dargestelltes Linsensystem die Vereinigungsweiten für violette, mittlere und rothe Strahlen berechnet, so kann man dem mittleren Resultate nicht eine Geltung einräumen, die auf gleicher Stufe stünde mit den beiden übrigen.

p. 262 ff. geht hervor, dass diese Autorität auf dem Gebiete der Theorie und der Ausführung die Rechnung für zwei Strahlen bestimmter Brechbarkeit anstellt, wogegen nach unserer in §§. 5. und 6. durchgeführten Methode mittelst des Gebrauchs der algebraischen Formeln für die Brechungsexponenten gleichzeitig alle Strahlen in Rechnung genommen werden.

Herschel in seiner angeführten Abhandlung begnügt sich bei Berechnung seiner Doppellinsen damit, die Farbenzerstreuung für die Centralstrahlen und die sphärische Abweichung für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit verschwinden zu machen; er braucht also für diese letztere Eigenschaft der Linse nicht zwei Gleichungen, wie Gauss und wie wir, sondern nur eine, und benutzt die noch übrige Bedingungsgleichung dazu, die Linse nicht allein für unendlich entfernte Objecte, sondern auch für nähere aplanatisch zu machen, indem er diejenigen Glieder, welche in unserer Formel (2) des §. 4. mit $\frac{y^2}{b}$ behaftet sind, für sich $= 0$ setzt. Wir hatten bei unserm dreifachen Objectiv nach Einführung der beiden Bestimmungsgleichungen (10) und (11) des §. 5. noch eine verfügbar, und hätten gleichfalls dieselbe so ansetzen können, dass die mit $\frac{1}{b}$ behafteten Glieder für sich verschwinden, indem wir für die Grössen n_1 , n_2 , n_3 in dieser Gleichung mittlere Werthe gesetzt hätten. Wir hätten dann die Vorzüge der Gauss'schen und der Herschel'schen Doppellinse in unserer dreifachen Linse vereinigt, ganz abgesehen noch davon, dass auch die Achromasie vollkommener ist. Es hätte diess auch die Rechnung nicht wesentlich erschwert, da die auf $\frac{1}{b}$ bezügliche Bedingungsgleichung nur ersten Grades ist. Wir haben indessen, da wir unser Absehn nur auf Objective für astronomische Zwecke richteten, davon abgesehen und dafür die Bedingungsgleichung (12) eingeführt, wornach die Hinterfläche der ersten und die Vorderfläche der zweiten Linse zusammenfallen, weil wir vermutheten, der Gefahr des Lichtverlustes dadurch besser zu entgehen, vielleicht auch dem Künstler dadurch einen Vortheil zu verschaffen.

3. Nachdem in §. 6. nachgewiesen worden ist, inwie-

weit die daselbst berechnete Linse den Anforderungen der Achromasie genügt und wie weit sie aplanatisch ist, ist die wichtigste Frage darnach, in welchem Verhältniss ihre Brennweite zur Weite der Oeffnung steht. Der Halbmesser der Vorderfläche ist nur gleich $12^{\circ} 27' 10''$ gesetzt worden, trotzdem, dass einer Oeffnung von 8° , welche für die dritte Fläche angenommen wurde, eine Oeffnung von $12^{\circ} 44' 30''$ an der ersten Fläche entsprochen haben würde. Diess ist aber deshalb geschehen, weil wegen der zerstreuenen Wirkung des Systems der ersten und zweiten Linse die Randstrahlen, welche an der Vorderfläche jenseits $12^{\circ} 27' 10''$ auffallen, die dritte Linse nicht erreichen würden, und zwar würden bei einem nur wenige Secunden grösseren Abstände zunächst die violetten Strahlen nicht mehr, wohl aber noch die übrigen, und bei einem etwa $50''$ grösseren Einfallswinkel auch die rothen Strahlen nicht mehr in die dritte Linse dringen. Man darf daher der vordersten Linse nur die Oeffnung $12^{\circ} 27' 10''$ geben, oder hat etwa den Rand in entsprechender Weise zu bedecken, wenn alle das weisse Licht zusammensetzenden Strahlen gleichmässig zur Brechung gelangen sollen. Der Halbmesser der Vorderfläche der ersten Linse ist also

$$a_1 \sin 12^{\circ} 27' 10'' = 0,040193;$$

da nun 1,0425723 sich als mittlerer Werth der Vereinigungsweite ergeben hat, so ist dass Verhältniss beider Grössen 0,03856 : 1. Bei Fraunhofers grossen Fernröhren beträgt der Halbmesser der Oeffnung nicht mehr als 0,033 der Brennweite. Bohnenberger sagt a. a. O. p. 281, er erinnere sich nicht, gute Fernröhre gesehen zu haben, welche bei 4 Fuss Brennweite mehr als 3 Zoll Oeffnung gehabt hätten; diess giebt jenes Verhältniss wie 0,03125 : 1; Gauss hat seine oben eingehend betrachtete Doppellinse auf das Verhältniss 0,03830 : 1 angelegt. Nach Bruhns „Geschichte und Beschreibung der Leipziger Sternwarte“ hat der dortige Fraunhofer'sche Refractor von 2 Mt. Brennweite eine Oeffnung von 116 Mm., der Fraunhofer'sche Refractor von 1,5 M. Brennweite eine Oeffnung von 96 Mm., das Repsold'sche Universalinstrument von 380 Mm. Brennweite eine Oeffnung von 27 Mm., das Aequatorial von Pistor und Martins mit

Gläsern von Steinheil hat 3,9 Mt. Brennweite und 215 Mm. Oeffnung; bei diesen vier ausgezeichneten Instrumenten ist also das Verhältniss des Halbmessers der Oeffnung zur Brennweite 0,029 : 1 oder bezüglich 0,032 : 1, oder 0,0355 : 1, oder 0,0276 : 1. Das von Merz auf der Wiener Weltausstellung ausgestellte Objectiv hat, wie der amtliche Katalog angiebt, 490 Mm. Oeffnung und 7 Mt. Brennweite, also ist jenes Verhältniss 0,035 : 1. Man sieht also, dass in dieser Beziehung die im vorigen Paragraph berechnete Linse den besten Linsen gleichkommt oder sie übertrifft. Bedenkt man aber, dass der scheinbare Fehler gegen die Achromasie für die Centralstrahlen 0,000699, für die unter 6° auffallenden 0,000738, für die unter $8^\circ 20'$ auffallenden 0,000802, für die unter $12^\circ 27' 10''$ auffallenden 0,000877 ist, dass er also ausserordentlich langsam mit Vergrösserung der Oeffnung steigt, sowie dass die mittlere Brennweite der unter $8^\circ 20'$ auffallenden Strahlen von der der Centralstrahlen und der Randstrahlen sich nur um 0,000018 unterscheidet, so wird man voraussetzen dürfen, dass man auch die Oeffnung noch erheblich vergrössern könnte (natürlich unter Anbringung neuer Correctionen der Halbmesser), ohne zu sehr die übrigen Eigenschaften der Linse zu schädigen; und hiermit findet auch der Einwand seine Erledigung, dass durch Anwendung einer dreifach zusammengesetzten Objectivlinse der Lichtverlust zu gross werde.

4. Gleichung (14) des §. 6. hatte ausser der oben fernerhin angewendeten noch eine reelle Wurzel $\frac{1}{a_1} = -15,0298997$; hieraus ergeben sich folgende Werthe der 6 Halbmesser:

$$a_1 = -0,06653405, \quad a_2 = 0,1585261, \quad a_3 = -0,1585261, \\ a_4 = -0,07679777, \quad a_5 = 0,08799222, \quad a_6 = -0,1420988$$

abgesehen von den Correctionen wegen der Dicke der Gläser. Doch ist diese Art des Baues einer Linse von uns nicht weiter verfolgt worden, weil um ein ähnliches Verhältniss zwischen linearem Halbmesser der Oeffnung und der Brennweite herzustellen, wie bei der in §. 6. berechneten, die Oeffnung der Vorderfläche etwa 36° genommen werden müsste.

5. Man hätte wohl auch die Reihenfolge der Glasarten anders ordnen können, als es in §. 6. geschehen, insbesondere die Crown Glaslinse zuerst setzen, damit die vorderste Linse

eine Sammellinse wurde. Ein Versuch, wobei wieder die Halbmesser der zweiten und dritten Fläche, also der Hinterfläche der Crown Glaslinse und der Vorderfläche der ersten Flintglaslinse entgegengesetzt gleich gesetzt wurden, gab insofern kein günstiges Resultat, als zu dem erwünschten Verhältniss zwischen linearer Oeffnung und Brennweite, die Oeffnung nach Winkelmass an der zweiten und dritten Fläche zu gross, nämlich etwa 26^0 hätte werden müssen. Besser würde wahrscheinlich der Erfolg gewesen sein, wenn man in diesem Falle den vierten und fünften Halbmesser gleich und entgegengesetzt genommen hätte; doch ist diess nicht weiter verfolgt worden, da ja ohnehin die von uns ausgeführte Rechnung nur ein Exempel, nicht aber für eine technische Ausführung bestimmt ist.

6. Vor allem ist für ein günstiges Verhältniss zwischen Brennweite und linearem Durchmesser der Linse bei nicht allzugrosser Winkelöffnung die Wahl der Glasarten entscheidend. Versucht man z. B. aus den drei Glasarten Crown Glas Lit. M, Flintglas No. 13 und Crown Glas No. 13, zwischen welchen die Brechungsverhältnisse am stärksten differiren, eine Linse zu berechnen, so bestimmen sich die Werthe von

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} \text{ zu } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = + 104,07884,$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = - 19,50565, \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} = - 84,90758,$$

woraus sich bereits abnehmen lässt, dass mindestens zwei der Krümmungshalbmesser, folglich auch die linear gemessene Oeffnung der Linse im Verhältniss zur Brennweite sehr klein ausfallen müssen.

- Hrabák, Josef**, Professor an der Bergakademie zu Pribram, **mathematisch-technisches Tabellenwerk**. Eine möglichst vollständige Sammlung von Hilfstabellen für Rechnungen mit und ohne Logarithmen. Nebst Mass-, Gewichts- und Geldrechnungstabellen etc. [VIII u. 445 S.] gr. 8. geh. 8 Mark.
- Joachimsthal, F.**, **Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung**. [Herausgegeben von A. Lierse-mann.] Mit 4 Figurentafeln. [VIII u. 174 S.] gr. 8. geh. n. 5 Mark.
- Klein, Prof. Dr. Hermann**, Lehrer der Mathematik und Physik am Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden, **die Principien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt**. Eine von der philosophischen Honoren-Facultät zu Göttingen gekrönte Preisschrift. [VIII u. 120 S.] gr. 8. geh. n. 2 Mark 40 Pf.
- Kohlrausch, F.**, ord. Prof. am Grossh. Polytechnikum zu Darmstadt, **Leitfaden der praktischen Physik**. Mit einem Anhang: **Das elektrische und magnetische absolute Masssystem**. Zweite Auflage. [XI u. 219 S.] gr. 8. geh. n. 4 Mark 40 Pf.
- Kötteritzsch, Th.**, Dr. ph., Lehrer am Gymn. zu Grimma, **Lehrbuch der Electrostatik**. [X u. 335 S.] gr. 8. geh. n. 7 Mark.
- Neumann, Dr. Carl**, Professor an der Universität zu Leipzig, **Theorie der elektrischen Kräfte**. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. I. Theil. gr. 8. geh. n. 7 Mark 20 Pf.
- Reidt, Dr. Friedrich**, **Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie**. 2 Theile. gr. 8. geh. n. 5 Mark.
 Einzeln: I. Theil: **Trigonometrie**. [XII u. 228 S.] n. 3 Mark.
 II. Theil: **Stereometrie**. [VIII u. 150 S.] n. 2 Mark.
 ——— **Resultate hierzu**: I. Theil: **Trigonometrie** 1 Mark 80 Pf.
 II. Theil: **Stereometrie** 1 Mark.
- Salmon, Georg**, **analytische Geometrie der Kegelschnitte** mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Deutsch bearbeitet von Dr. W. FIEDLER, Professor am eidgen. Polytechnikum zu Zürich. Dritte Auflage. [XXXV u. 609 S.] gr. 8. geh. n. 14 Mark 40 Pf.
- — — **analytische Geometrie der höheren ebenen Curven**. Deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. [XVI u. 472 S.] gr. 8. geh. n. 10 Mark.
- Schlegel, Victor**, Mathematiker am Gymnasium zu Waren, **System der Raumlehre**. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. I. Theil: **Geometrie**. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene. [XVI u. 156 S. mit vielen Holzschnitten im Text.] gr. 8. geh. n. 4 Mark.

Schlömilch, Dr. Oskar, Kgl. Sächs. Geh. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule in Dresden, **Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis**. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. [VII u. 287 S.] gr. 8. geh. n. 6 Mark.

Schröder, Dr. E., Professor am Pro- und Realgymnasium in Baden-Baden, **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für Lehrer und Studierende. Erster Band. Die sieben algebraischen Operationen. [X. u. 360 S.] gr. 8. geh. n. 8 Mark.

Schüler, Dr. W. T., Assistent an der polytechnischen Hochschule zu München, **die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung**. Vorlesungen. I. Theil: Die vier Spezies mit ganzen und gebrochenen positiven und negativen Grössen und die Determinanten. [VI u. 140 S.] gr. 8. geh. n. 4 Mark.

Sonderhof, A., ein **Beitrag zur höheren Geodäsie**. Separat-
abdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. [VIII u. 95 S.] gr. 8. geh. n. 2 Mark.

Wenck, Dr. Jul., Dir. d. Gewerbeschule in Gotha, **die Grundlehren der höheren Analysis**. Ein Lehr- und Handbuch für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik. Zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. Mit besonderer Berücksichtigung derer, welche einem technischen Berufe sich widmen. Mit 140 Figuren (im Text). [VII u. 432 S.] gr. 8. geh. n. 6 Mark.

Weyrauch, Dr. Jakob, **allgemeine Theorie und Berechnung** der kontinuierlichen und einfachen Träger. Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Mit vielen Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. geh. n. 5 Mark 20 Pf.

Wüllner, Dr. Adolph, Professor der Physik an der königl. polytechnischen Schule zu Aachen, **Lehrbuch der Experimentalphysik**. IV. Band. **Die Lehre vom Magnetismus und der Electricität**. [Dritte Ausgabe.] Zweite vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [XII u. 1006 S.] gr. 8. geh. n. 13 Mark.

Früher erschienen:

I. Band: **Mechanik und Akustik**. 2. Aufl. 1870. n. 8 Mark.

II. — **Die Lehre vom Licht**. 2. Aufl. 1870. n. 9 Mark.

III. — **Die Lehre von der Wärme**. 2. Aufl. 1871. n. 8 Mark

Preis des vollständigen Werkes, mit vielen Holzschnitten und 4 Spektraltafeln n. 38 Mark.



Ein vollständiges Verzeichniss des Verlags von

B. G. Teubner in Leipzig

auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften, ist durch alle Buchhandlungen gratis zu haben.

28.F.177.

Die Brechung des Lichts in Glas1874

Countway Library

AFT2716



3 2044 045 001 633

28.F.177.

Die Brechung des Lichts in Glas1874

Countway Library

AFT2716



3 2044 045 001 633